

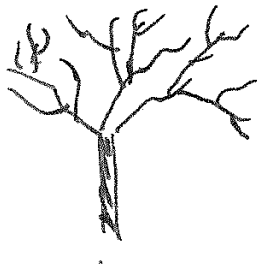
Fraktálnövekedés

- Miért fontos? - ember készítette objektumok ált. nem fraktálok
 (megj.: pl. az asztal felülete nanométeres skálán elég bonyolult)
 - természetben nagyon gyakori
 pl: felhő, Anglia partja, faágak, bizonyos hegyek

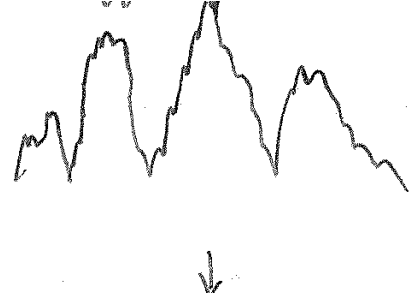
felhő



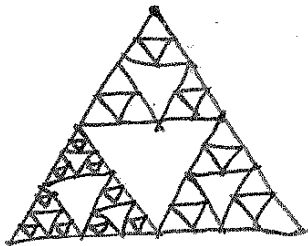
Felhő, partvonal
 izotrop vonal



elágazó struktúra(nincs hurok)
 fa, villám, gyökér
 érhálózat



felületek
 hegyorom
 mikroszkopikus felbontásban a legtöbb
 felület ilyen fizikai függvények



→ csak hurok van benne

Fontos fogalmak: - skálázás

$f(x)$ skálázó fgv., ha $f(x)=b^{-\alpha} f(bx)$
 ilyenek a hatványfgv.-ek

- instabilitás

az elágazó szerkezet instabilitás útján jön létre:

instabil felület, kis perturbációs nem kisimul, hanem nőni kezd



- kollektív viselkedés

sok hasonló egységből álló rdsz.-ben az egységek viselkedhetnek → individuálisan
 → kollektíven

pl: ideális gáz molekulái individuálisan viselkednek

folyadék- pozícióik már nem függetlenek, de még nem hívjuk kollektív
 viselkedésnek,

Brown-mozgás – véletlenszerűen mozognak

szilárd, rács – kollektív viselkedés eredményeként

fraktálok is ált. sok k.ható egységből épülnek fel, ezek k.hatása hozza létre a fraktált

sok kristályos anyag szabályos elágazó szerkezetben kristályosodik



v. hópehely

3 fő téma:

- fraktálok (geometria, fraktálgeometria alapjai)
- modellezés
- gyakorlati növekedési jelenségek

Fraktálgeometria

a fraktálok (tipikusan) önhasonlóak (skála-invariánsak)



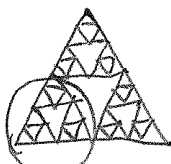
vizuálisan: az objektum kis részét felnagyítva az hasonlít az eredetire
v. máshogy: az objektumot lekicsinyítve úgy néz ki, mint az eredeti objektum egy része

a matematikai értelemben vett fraktál absztrakció

pl: $k=1$ lépés



$k=2$



e

zt duplázva uazt. kapom, mint az eredeti

matematikai fraktál: $k \rightarrow \infty$, ∞ pici részletekkel rendelkezik \rightarrow teljesen önhasonló
véges sok k lépés után duplázva a fenti részt a legkisebb részek

is duplázódnak, nem lesz teljesen uaz., mint az eredeti

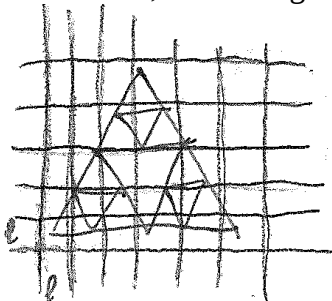
fizika: van egy méretskála, amin belül igaz az önhasonlóság

beágyazási dimenzió (d) : az a legkisebb euklideszi, amilyen dimenziójú euklideszi térben még éppen belefér

egy fizikai objektumot fraktálnak nevezünk, ha a térfogata /felülete/ hosszát mérve szokásos módszerekkel az nem konvergál jól (0 v. ∞ -hez tart), a méréshez használt egységnyi objektumot több nagyságrenden keresztül változtatva

fraktál: pl. Δ -es szerkezet \rightarrow teli Δ -ekből kivágással: területe $\rightarrow 0$
 \rightarrow vonalakkól: vonalak teljes hossza $\rightarrow \infty$

területe 0, hossza végtelen \rightarrow az objektumot leíró dimenzió 1 és 2 között van



lefedjük d beágyazási dimenziójú hálóval
megszámoljuk, hány dobozban van része a fraktálnak $\rightarrow N(l)$
vagy kis golyókkal fedem le a fraktált, ehhez $N(l)$ db. golyó kell

$$V(l) \sim l^d \cdot N(l)$$

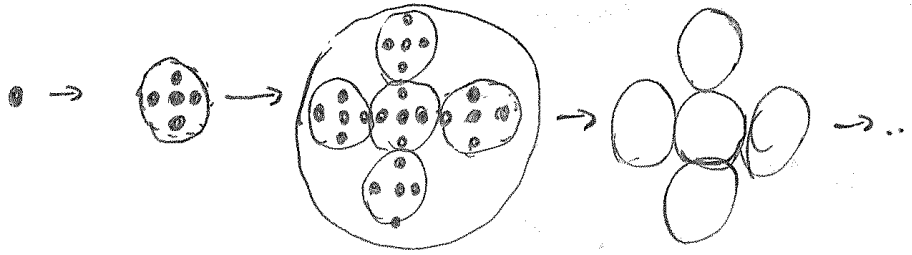
$l \rightarrow 0$, $V(l)$ véges



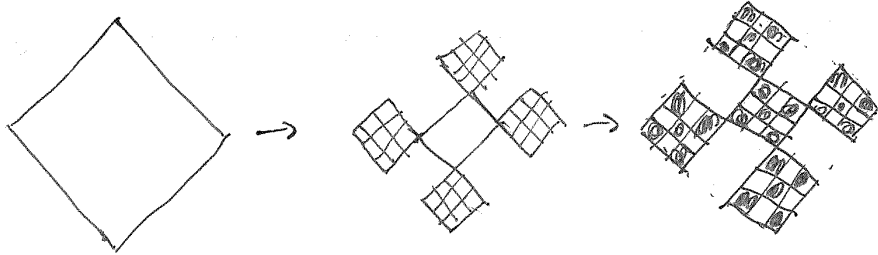
$$N(l) \sim l^{-d}$$

fraktálok konstrukciója: - növekedő
felosztódó

növekedő:



felosztódó:

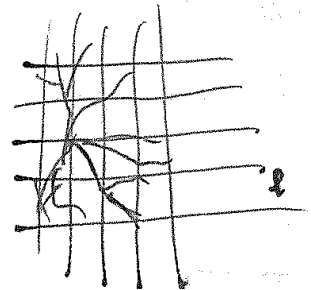


uaz. lesz, mint az előző növekedő, átskalázás után
 V (V =minden) $k < \infty$ -re ezek átskalázhatók egymásba, ekvivalensek
 pl: felhő felületének fodrozódása
 természetben túlnyomórészt növekedéssel keletkeznek a fraktálok
 elméleti vizsgálatokhoz a felosztódó szerkezet előnyösebb
 fizikai fraktál: van egy legkisebb és legnagyobb méret
 fraktál: nem 1,2 v. 3 dimenziós \rightarrow D fraktáldimenzióval lehet leírni

$$N(\ell) \sim \ell^{-D}$$

$$D = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln N(\ell)}{\ln(1/\ell)}$$

fraktáldim.

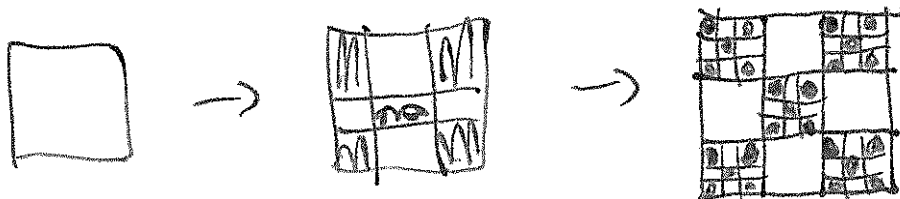


Növekvő struktúra: $N(L) \sim L^D$

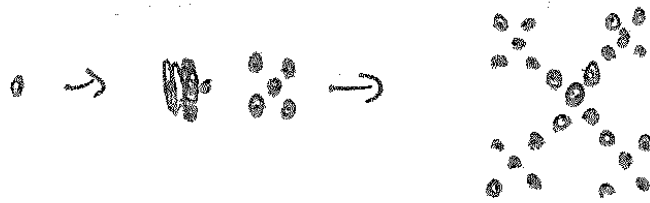
önhasonlóság \leftrightarrow hatványfgv.

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}$$

A 2 def. ekvivalens



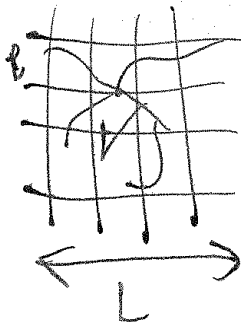
növekedővel:



$N(L) = 5^k$, $L = 3^k$ (azaz: 3-szor akkora, 5-ször annyi részecske 1 lépés után)

$$D = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.465$$

Fiz. Fraktál: van legkisebb és legnagyobb méret (L)



$$\varepsilon := \frac{l}{L} \quad \varepsilon \ll 1$$

akkor $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$
ez is uaz. a D lesz

Hausdorff-dimenzió:

meg akarta mérni a fraktál térfogatát (mértékét)

$$M(\varepsilon, D_h) := \inf_{\# \text{ legkevesb}} \sum_i r_i^{D_h} \quad r_i < \varepsilon$$

- sugarú körökkel / gömbökkel lefedjük az objektumot ← a beágyazási dim.-nak megfelelően

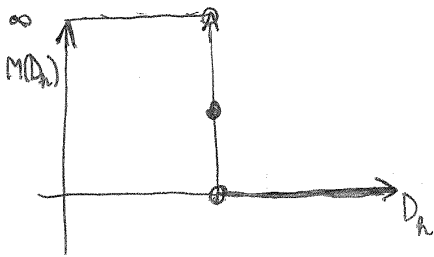
ezek sugara különbözhet egymástól, de $< \varepsilon$

optimális lefedést szeretnénk → $\sum_i r_i^{D_h}$ minimumát vesszük

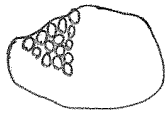


$$M(D_h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(\varepsilon, D_h)$$

$D_H := \sup\{D_n, \text{amire } M(D_n) > 0\}$, ez a Hausdorff-dimenzió



2. Dolzettelum:



$N(r) \sim r^{-2}$

$\sum_i r_i^{D_n} \rightarrow r^{-2} \cdot r = r^{-1}$
 $\downarrow r \rightarrow 0$

$D_n = 2$: véges mérték $\rightarrow D_H = 2$

$D_n > 2$: 0

$D_n < 2$: $\rightarrow \infty$

Pl: rac.szárok [0,1]-en dimenziója:



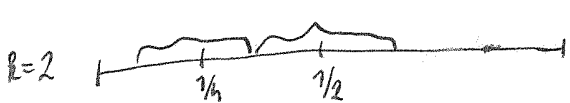
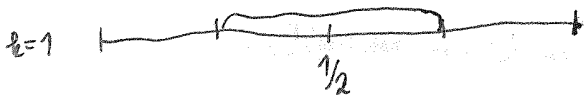
dobozok, hány dobozban van rac.szám? $l \rightarrow 0 : N(l) \rightarrow l^{-1}$, V kis szakaszon van rac.szám

$\rightarrow D_{\text{box}} = 1$

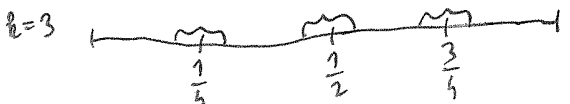
intuícia: elemei megszámlálható sokan, [0,1] kontinuum számoságú pontból áll \rightarrow a dimenziója 0

Hausdorff-módszerrel:

k. lépés: $(1/2)^k$ hosszú szakaszokkal lefedés



1/4 hosszú szakaszok



1/8 hosszú szakaszok

következő rac.szám,.....

k.lépés: k rac.szám körül $(1/2)^k$ hosszú intervallum

$M(k, D_H) = k \cdot (1/2)^{k D_H}$

$k \rightarrow \infty$ esetén $\forall D_H > 0$ -ra $m(k, D_H) = 0$ lesz

\downarrow
 $D_H = 0$ a rac.szárok dim.-ja

Hasznos összefüggések

-vetület fraktáldim.-ja: (pl. fa fényképe)

$$D_p = D \quad \text{ha} \quad d_p > D$$

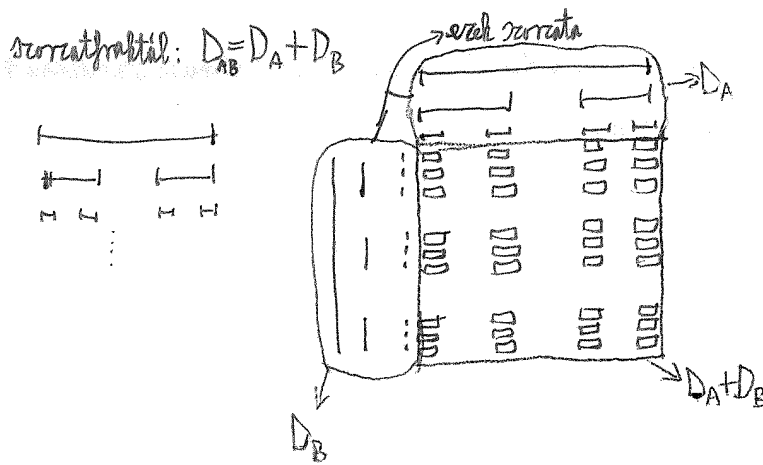
$$D_p = d_p \quad \text{ha} \quad d_p \leq D$$

D_p dim.-ra vetítve:

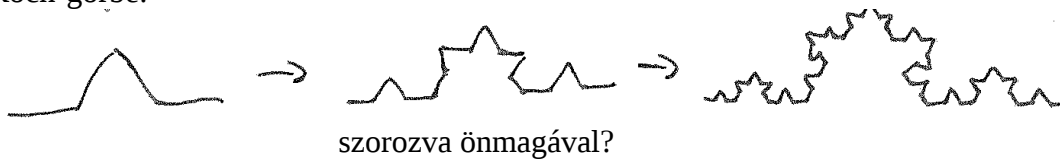
- d-m dim. metszet → D-m lesz a fraktáldim.-ja

↑
beágyazásdim.

- 2 fraktál D_A és D_B-vel



Koch-görbe:



-2 fraktál uniója, $D_A > D_B$

$$D_{A \cup B} = D_A$$

A befedéséhez: $N_A(l) \sim N_A(l)^{-D_A}$ miát: $\sim N(l)^{-D_A} + N(l)^{-D_B} \sim N(l)^{-D_A}$

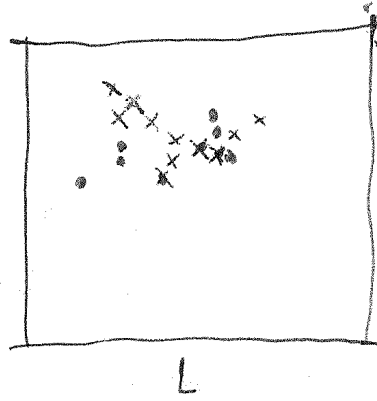
B " " : $N_B(l) \sim N_B(l)^{-D_B}$

↑
gyorsabban divergál

- 2 fraktál metszete

$$D_{A \cap B} = D_A + D_B - d$$

L méretű doboz



metszetfv. sűrűsége = 2 sűrűség szorzata (sűrűség = valószínűség a fraktálhoz tartozik egy doboz)

A, B részecskéinek sűrűsége ~

$$\frac{L^{D_A}}{L^d}, \frac{L^{D_B}}{L^d} \rightarrow \text{azonos részecske száma B-ben}$$

(nagyobb térfogat)

$$\text{metszet sűrűsége} = \frac{L^{D_A}}{L^d} \cdot \frac{L^{D_B}}{L^d}$$

$$N_{A \cap B} \sim \text{sűrűség} \cdot L^d = \frac{L^{D_A} \cdot L^{D_B}}{L^d} \sim L^{D_{A \cap B}} \Rightarrow D_{A \cap B} = D_A + D_B - d$$

spec.: $D_B = 2, \text{ metszet } \left. \begin{array}{l} \\ d=3 \end{array} \right\} \rightarrow D_{\text{metszet}} = D_A - 1$

Fraktálok típusai

1., determinisztikus és véletlen fraktálok

determinisztikus fraktálok

iterációval konstruáljuk
kiinduló obj., V lépésben $1/r$ -re kicsinyített p db. másolatával helyettesítem
pl:

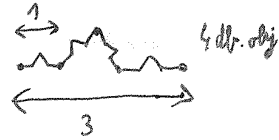


$$N\left(\left(\frac{1}{r}\right)^k\right) = n^k$$

Koch görbe $\rightarrow n=4, r=3$

$$D = \frac{\ln n}{\ln r}$$

növekvőre is hasonlóan lin. méret hányzorosára nő $\rightarrow r$

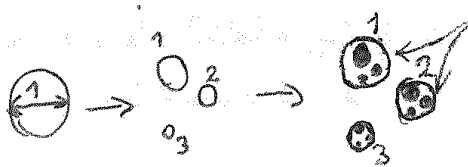


hányszor ismétlem $\rightarrow n$

nem-uniform fraktál: $r_i > 1$, r_i -k különbözőek

pl:

alfraktálok



r_1, r_2, r_3

átmérés $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}$

$$\frac{1}{r_1^2}, \frac{1}{r_1 r_2}, \dots$$

nagyon különböző méretűek is előfordulnak

$N_i(\epsilon)$: ϵ sugarú gömbök száma, amik az i . alfraktál lefedéséhez szükségesek az egész lefedéséhez

$$N(\epsilon) = \sum_i N_i(\epsilon) \quad \text{gömb kell}$$

Nem-uniform fraktál (többskálájú):

$1/r_i$ kicsinyítés

k lépés után egy adott körre:

$$\left(\frac{1}{r_1}\right)^l \left(\frac{1}{r_2}\right)^m \left(\frac{1}{r_3}\right)^{k-l-m}$$

hány kis dobozzal fedhető le?

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$$

$$N(\epsilon) = \sum_i N_i(\epsilon)$$

(dobozok száma = alfraktálok lefedéséhez szükséges dobozok összege)

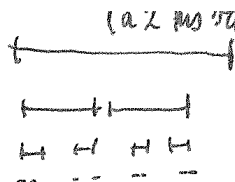
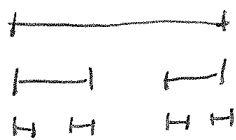
$$N_i(\varepsilon/r_i) = N(\varepsilon) \quad \text{az önhasonlóság miatt} \rightarrow N_i(\varepsilon) = N(r_i \varepsilon) \sim$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{r_i}\right)^D = 1 \quad \text{egyenlet a fraktáldimenzióra}$$

$$N(\varepsilon) = \sum_i N_i(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon^{-D} = \sum_i (r_i \varepsilon)^{-D}$$

sztochasztikus fraktál (iterációval)

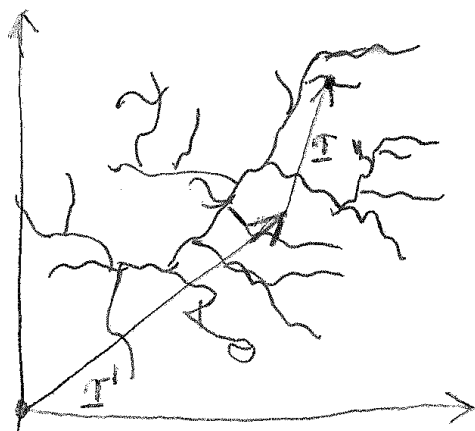
pl: Cantor-halmaz: sztochasztikus: 1 lépésben véletlenszerű elhelyezésük 2/3 hosszú szakaszt (a 2 kis szakasz nem lóghat egymásba)



uannyi lesz a lefedéshez szükséges szakaszok száma, mint a Cantor-halmaznál → uaz a fraktáldimenziójuk

véletlen fraktál (nem iterációval)

a legtöbb a természetben ilyen, nincsen rá iterációs szabály
fraktáldim.-ja dobozokkal is mérhető, de célszerű a korrelációs fgv.-ét nézni



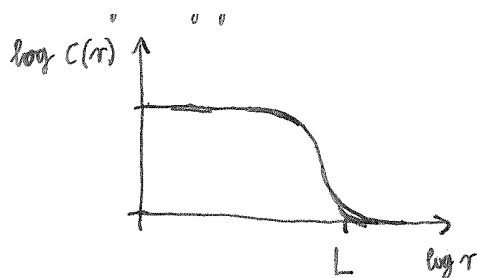
ezek szerkezetét a sűrűség-sűrűség v. párkorreláció fgv. jellemzi

$$c(r) = \frac{1}{V} \sum_{r'} g(r+r') g(r')$$

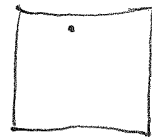
$g(r) = 1$, ha r az objektumhoz tartozik
 $= 0$, különben

$c(r)$: mi a val.szín.-e, hogy r távolságra J egy részecskéje a fraktálnak, ha r' a fraktálon van.
 általában a fraktál, $c(\underline{r}) = c(\underline{r}) = c(r)$

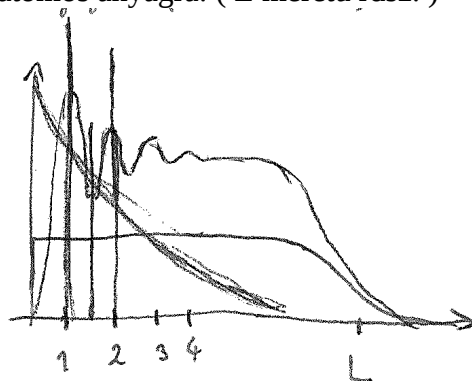
homogén anyagra:



L hosszú, homogén négyzet:



atomos anyagra: (L méretű rdsz.)



fraktál
 kristály (de: kristály anizotróp, $c(r)$ lesz)
 folyadék
 gáz

fraktál önhasonló $\rightarrow c(br) \sim b^{-\alpha} c(r) \rightarrow c(r) \sim r^{-\alpha}$

L sugárú gömbben lévő részecskék száma: $N(L) \sim \int_0^L c(r) d^d r \sim L^{d-\alpha} \sim L^D$

$\Rightarrow D = d - \alpha$

Példák:

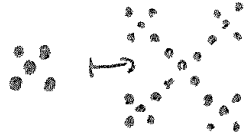
1., Cantor-halmaz (3-ad részét középről kivágjuk)

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309$$

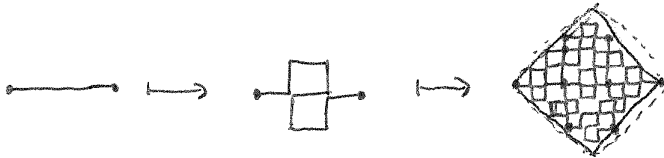
ált. n his szakasz, $1/\tau$ hosszal $\left. \begin{array}{l} n=2, \tau=4 \\ n=3, \tau=9 \end{array} \right\} D = \frac{1}{2}$, de a két fraktál másként néz ki



uaz., mint:



3.) Peano-görbe, 2D vonal $\rightarrow D = \frac{\ln 9}{\ln 3}$



sűrűn behálózza a piros négyzetet, tetsz. ponthoz közel kerül

megj: racionális számok Haudorff-dimenziója $D_H = 0$

Cantor_halmaz: rac. pontok a végpontjai \rightarrow mégse lesz $D_H = 0$

4., Sierpinski-szűrő



mindenféle méretű luk lesz rajta

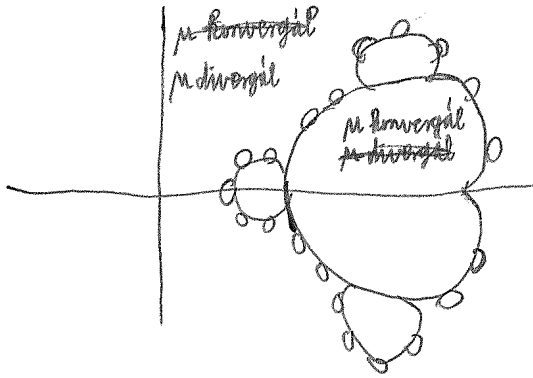
$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

5., Mandelbrot-halmaz

$$M, z \in \mathbb{C}$$

$$z_{k+1} = z_k^2 - M$$

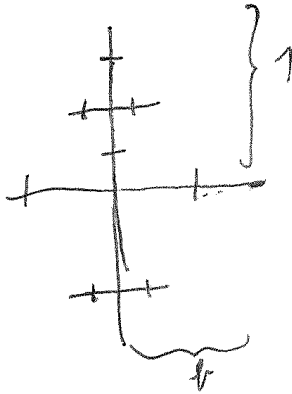
$Z_0 = 0$, $k \rightarrow \infty$ esetén milyen μ -re konvertál?



a 2 közti határ egy fraktál

6.,

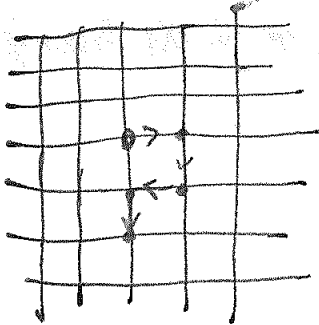
$$\sum_{i=1}^n \tau_i^{-D} = 1$$



$$2\left(\frac{1}{2}\right)^D + 2\left(\frac{1}{2}\right)^D = 1$$

$$\text{pl: } b = 1/2 \rightarrow D = \frac{1 - \ln(\sqrt{3}-1)}{\ln 2} \approx 1,45$$

7., véletlen bolyongás (sztochasztikus fraktál)



rács, ezen lépkedek véletlen irányokba

vagy: folytonos modell,

$$\langle R^2(t) \rangle \sim t \quad d\text{-től függetlenül}$$

$$\downarrow$$

$$\langle R(t) \rangle \sim t^{1/2}$$

Poisson-elv. szerinti hossz,
véletlen irány

a 2 uabba az univ. osztályba tartozik
vizsgáljuk a bolyongó részecske pályáját, azaz V lépésben
leteszünk egy részecskét oda, ahol épp van a bolyongó részecske

$$\downarrow$$

$$N(R) \sim t \sim \langle R^2(t) \rangle \quad \rightarrow D = 2 \quad \text{a beágyazási dim.-től függetlenül}$$

ha a beágyazó dim. 2 \rightarrow paca, nem fraktál
3 \rightarrow fraktál lesz

8., Levy-repülés

folyt. bolyongás általánosítása

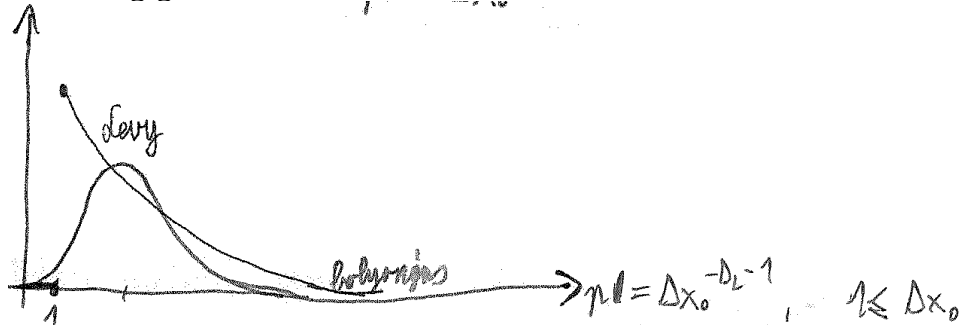
V irány uolyan val.szín.-gel

a távolság, amennyit egy irányba megy, most nem Poisson-elv.,

Δx hosszú ugrás

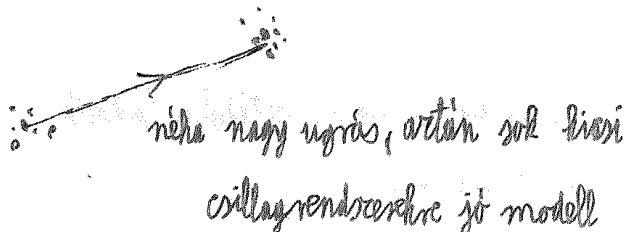
$$\begin{cases} P(\Delta x > \Delta x_0) = \Delta x_0^{-D_L}, & \text{ha } \Delta x_0 \geq 1 \\ P(\Delta x > \Delta x_0) = 1, & \text{ha } \Delta x_0 < 1 \end{cases}$$

\rightarrow sűrűségfgv.-e:



hatványfgv. \rightarrow nagy ugrások valószínűsége sokkal nagyobb, mint exp. lecsengésnél

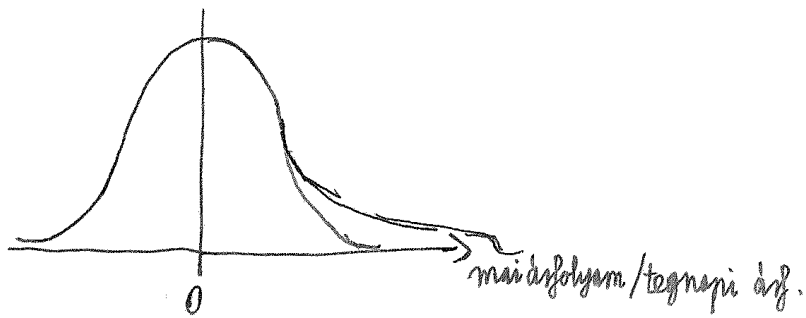
képe:



fraktáldim. $D = D_L$, ha $D_L < 2$

$D = 2$, ha $D_L > 2$ ha gyorsan csökken, úgy viselkedik, mint exp. lecsengésnél
több állat is ehhez hasonló stratégiával kutat a táplálék után (pl: albatrosz)
ez hatékony módszer, különösen, ha a táplálék is fraktál eloszlású

részvényárfolyamok fluktuációja



- Gauss elv.: ha teljesen véletlenek a befolyásoló tényezők → bolyongásra visszavezethető
- valódi piacon: Levy-bolyongással jobban modellezhető, hatványfgv. lecsengésű a vége

Önaffin fraktálok

nem önhasonlók az eddigi értelemben
most hosszakat irányfüggő faktorokkal kell skálázni
fgv.: egyértékű hozzárendelés

fraktálfgv.: J egy kitüntetett irány (a függőleges), amire máshogy skálázódik



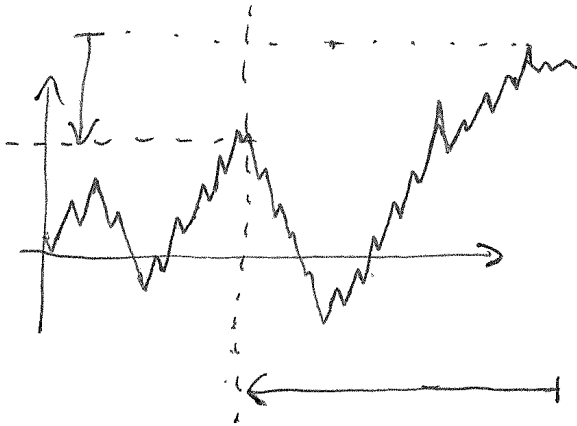
v. hegylánc:



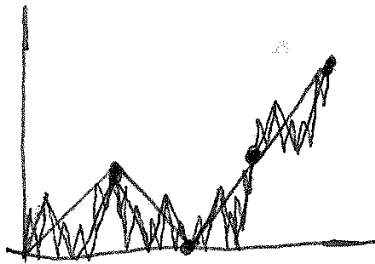
fraktál - felület

x-y síkban ált. izotrop

ha $F(x) \approx b^{-H} F(b \cdot x)$, $H > 0$, és $F(x)$ egyértelmű, sehol sem deriválható \rightarrow önaffin



determinisztikus önaffin fraktál:



- 1. lépés
- 2. lépés
- 3. lépés függ.: irányba felére, vízsz. 1/4-ére húzom

·
·
·

∞ finom \rightarrow minden pontjában törés, sehol sem lesz deriválható
sok kis lépés véletlen irányba \rightarrow sztoch. önaffin fraktál lesz (ekkor lesz alsó levágás is)

↓
v. föl, v. le ↓
1 D Brown-mozgás (bolyongás) $x(t)$ fgv.-e
uez. ruletten a nyert összeg, ha mindig pirosra teszünk
nyerés: ha $F > 0$, vesztes: ha $F < 0$

nullahelyek eloszlása:
↓
nyerési-vesztési sorozatok határa

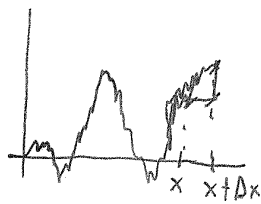
$$D_{ANB} = D_A + D_B - d = 0,5 \rightarrow \text{fraktál eloszlás}$$

| | | |
|-----------------|----------------|---|
| 1,5 | 1 | 2 |
| ↑ | ↑ | |
| önaffin fraktál | vizsz. tengely | |

↓
nincs nyerő stratégia a ruletten

ekvivalens definíció:

$$\langle |F(x+\Delta x) - F(x)| \rangle \sim \Delta x^H \quad 0 < H < 1$$

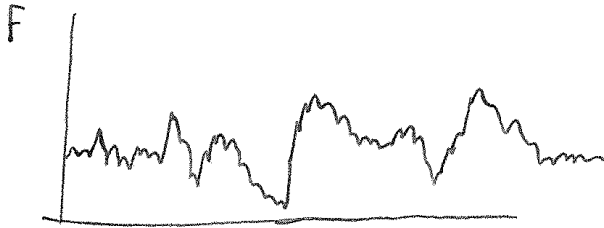


$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x)$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \Delta x^{H-1} \rightarrow \infty, \text{ ha } H < 1 \rightarrow \text{nehogy differenciálható}$$

lokális és globális dimenziók:

pl. úttest felülete: kis (1 μ m-1mm) skálán összevissza változik, fraktálszerű



de: F bizonyos korlátokon nem lép át, nem igazi fraktál

tfh. $\Delta F \sim \Delta x^H$

ha $\Delta x \ll 1$: $\Delta F > \Delta x$, $H < 1$ lesz \rightarrow lokálisan „szőrös” fgv.
 ha $\Delta x \gg 1$: $\Delta F < \Delta x$,

x_c : $|F(x+x_c) - F(x)| \sim |x_c|$ karakterisztikus hossz, itt vált a 2 viselkedés

x_c : átcsapási hossz

pl: 1D bolygó részecske

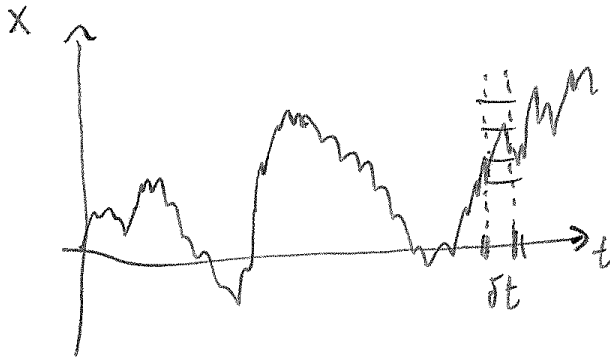
(v. több dim. részecske bolyong, vetülete 1 tengelyre, ez is bolyong, de nem pont úgy, mint az 1D részecske, pl: részecske ugorhat a tengelyre b-en, ekkor nincs elmozdulás a vetületben)

véletlenszerűen választjuk az irányt, (nem feltétlen 0.5-0.5 val.szín.-gel, pl. ha az irány val.szín.-e függ a múlttól is)

$$\langle X_H^2(t) \rangle \sim t^{2H} \quad H = \frac{1}{2}; \text{ Brown-mozgás}$$

$0 < H < 1$, $H \neq \frac{1}{2}$; fraktál Brown-mozgás

mi a fraktál Brown-mozgás fr.dim.-ja?



dobozok száma, amik átfednek a fraktállal: egy oszlopban $\frac{\delta t^H}{\delta t}$ doboz kell, mert $|\Delta x| \sim \delta t^H$

$\frac{1}{\delta t}$ db. oszlop van (ált: $\frac{1}{\delta t^{d-1}}$ db. oszlop kell)

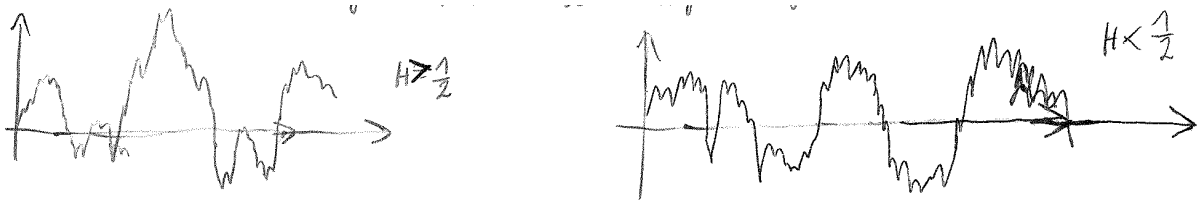
$$\Rightarrow N(\delta t) \sim \frac{\delta t^H}{\delta t^2} = \delta t^{-(2-H)} \Rightarrow D_B = 2-H \quad (D_B: \text{box-dimenzio})$$

ált.: $D_B = d - H$, ahol d a behyppzisi dim.

$x_H(t)=0$: zéro-halmaza a Brown-mozgásnak

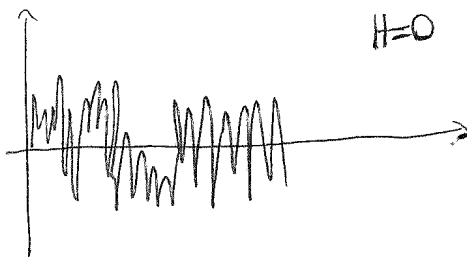
ez egy véletlen Cantor-halmaz, $D=1-H$ dim.-val

$H > 1/2$: az ugrások korreláltak az előző ugrás irányával



$H > 1/2$: közelebb van a vonalhoz, vonalra $H=1$

fehér zaj:



$H > \frac{1}{2}$: perzisztens fraktál, pozitív korreláció van az ugrások irányá között

előző lépés ↑: mostani lépésre: $p_t > p_t$
 előzővel korrelál → a korábbiakkal is

$H < \frac{1}{2}$: antiperzisztens, negatív korreláció
 előző ↑ → $p_t > p_t$

$H = \frac{1}{2}$: nincs korreláció, Brown-mozgás $p_t = p_t$

biz: legyen $X_H(0) = 0$, $-X_H(-t)$ múltbeli növekmény
 $X_H(t)$ jövőbeli növekmény

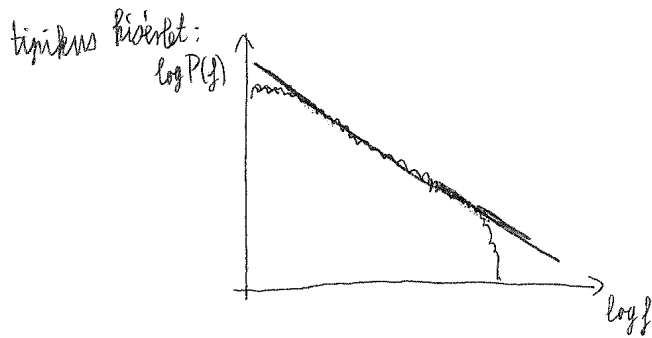
korrelációjuk: $\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X_H(t) - X_H(-t)]^2 \rangle - 2 \langle [X_H(t)]^2 \rangle \} = \frac{1}{2} (2t^{2H} - t^{2H})$ /: $\langle X_H^2(t) \rangle = t^{2H}$

$\langle (\Delta x)^2 \rangle \sim \Delta x^H$, és $\langle X^2(\Delta t) \rangle \sim \Delta t^{2H}$
 ||
 $\langle (X(t+\Delta t) - X(t))^2 \rangle$

$\frac{\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle}{\langle X_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1$ időtől független korreláció
 korreláció nem cseng le!

Fourier-spektrum

véletlen, önaffin-fgv.szerű jel Fourier-spektruma
 f: frekv., $A(f)$ előjele változhat, $|A(f)| \sim f^{-H-1/2}$



$P(f)$: teljesítmény-spektrum, $P(f) \sim A^2(f)$

pl: tőzsdén $H \approx 0.55 \rightarrow$ van egy kis korreláció, de nem elég a meggazdagodáshoz

pl: Weierstrass- Mandelbrot fgv. (1872)

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \cos(b^n t)}{b^{(2-D)n}}$$

fraktálfgv.

$1 < D < 2,$ $b > 1$

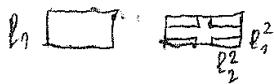
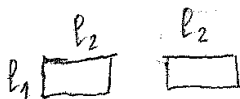
$C(t)$ folytonos, de $\frac{dC(t)}{dt}$ divergál mindenhol

$n \mapsto n+1$ helyettesítés $\Rightarrow C(t) = b^{-(2-D)} C(bt) \Rightarrow$ önaffin fgv.

$\cos(b^n t)$ tagok \rightarrow nincs korlát. frekv.

$\frac{1}{b^{(2-D)n}} \rightarrow$ lecsengő amplitúdó, hatványfgy.

pl: 2 Cantor-halmaz szorzata is önaffin fraktál, ha $l_1 \neq l_2$



$l_1 < l_2$

$D_1 = \ln 2 / \ln(1/l_1)$ és $D_2 = \ln 2 / \ln(1/l_2) \Rightarrow D_L = \frac{\ln 2}{\ln(1/l_1)} + \frac{\ln 2}{\ln(1/l_2)}$

kis részhalmaz: elnyúlik, affin trf.-val kihúzza az egész fraktálra visszaadja az eredeti fraktált

Kövér fraktálok

eddig: $D < d$

def.: térf. mérése, hatványfgv. szerint változik a doboz méretével
 eddig: $\rightarrow 0$, v. $\rightarrow \infty$, de tarthat hatványfgv. szerint egy véges számhoz is

$$V(l) = V(0) + f(l)$$

$V(0) = V_0$: térfogat az $l \rightarrow 0$ határértékben

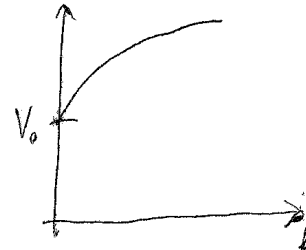
(~~az $f(l)$~~) ~~mindes~~ fraktálokra $V_0 = 0$

$$\text{és } f(l) \sim l^{d-D}, \quad D < d$$

$$V(l) \approx V(0) + A \cdot l^\beta$$

$$\beta = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln[N(l)l^d] - V(0)}{\ln l}$$

$\beta > D$, és $\beta = \infty$ nem-fraktál alkalmazható



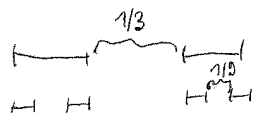
nem-fraktál: exp. tart. v. kvadr.

$N(l)$: d -dim. labdák száma, amikkel lefedjük a fraktált

Peano-görbe nem kövér fraktál

pl: módosított Cantor-halmaz

Cantor-halmaz



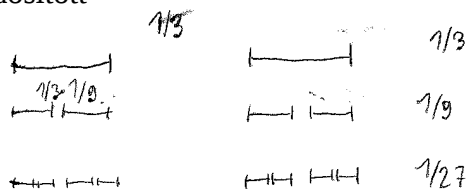
\forall az $1/3$ -át szedjük ki

a kivett szakaszok hossza $\rightarrow 1$

0 a hossza

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots = 1$$

módosított



réslet reszül ki

a kivett szakaszok egyesített hossza kisebb, mint
 $1 \rightarrow$ véges hossza lesz a maradványnak

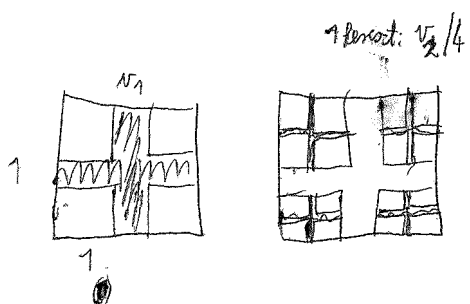
$D = d = 1$

topológiailag olyan, mintha Cantor-halmaz, a végén minden szakasz hossza 0 a kövér fraktál nem önhasonló

általános:

d dim. hiperkocka, egységnyi élhossz kivágunk v_1 térf. „keresztet” \rightarrow a maradék

kockából v_2 térfogatot



a maradék térfogat: $V_k = (1-v_1)(1-v_2)(1-v_3)\dots(1-v_k) = \prod_{i=0}^k (1-v_i)$

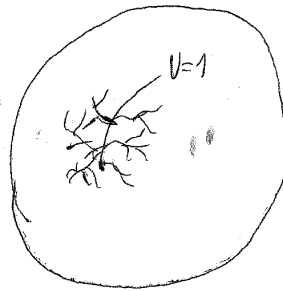
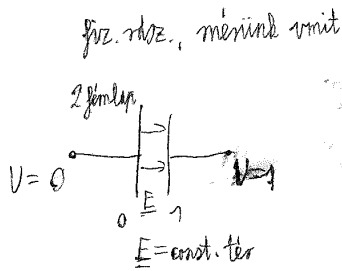
$$V_k \rightarrow V, \text{ ha } k \rightarrow \infty$$

$$\text{Ha } \sum_0^{\infty} v_k < \infty \Rightarrow \prod_0^{\infty} (1-v_k) > 0$$

Fraktál mértékek (Multifraktálok)

tfh. van egy önhasznó fraktál, ennek pontjaihoz hozzárendelünk egy skalárt (\sim skalármező)

↓
bonyolultabb lesz, mint egy fgv.



vezető fraktál

$$E = ?$$

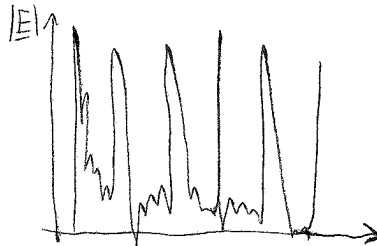
$$E = grad U$$

concentratio \Rightarrow csúcsoknál $E = grad U \rightarrow \infty$

hővezetés, koncentráció, elektr. tér \rightarrow Laplace-egyenlet

2 D, Laplace-egy. megoldása szemléletesen:
gumihártya a peremre, a fraktál mentén megemelem \rightarrow a gumihártya alakja lesz a Laplace-egy. megoldása, csúcsnál ∞ meredek lesz

$|E|$ eloszlás a fraktál mentén:



van, ahol 0, van ahol ∞ , sehol sem lesz folytonos \rightarrow nem fgv., hanem mérték lesz

mérték: A halmaz, a mértéke μ_A

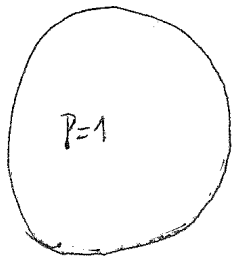
$$\mu_{A \cup B} = \mu_A + \mu_B, \text{ ha } A \cap B = \emptyset$$

ilyen pl: tömeg, valószínűség

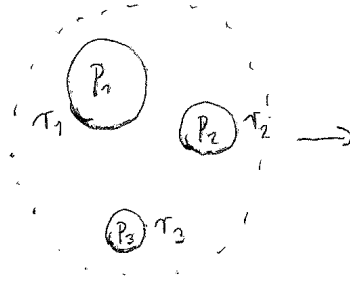
$$\text{normálás: } \int_F \mu d\mu = 1 \text{ az egész tartományra}$$

Multifraktál

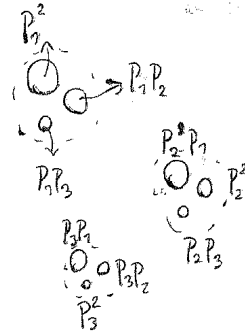
pl: _____



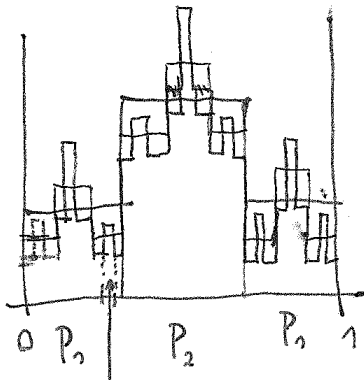
1 mértéket rendelünk hozzá



P_1, P_2, P_3 mértékek,
és $P_1 + P_2 + P_3 = 1$



pl:



pl: $P_1 P_1 P_2$ lesz területe

multiplikatív folyamat
 $2P_1 + P_2 = 1$

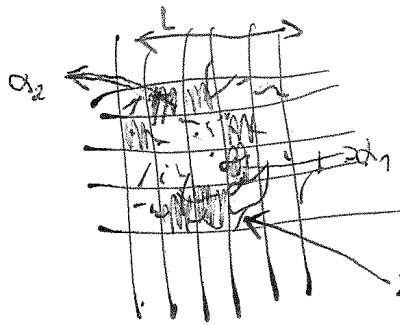
Itt most fraktál mérték lesz,
de a „tartója” nem fraktál, hanem a $[0,1]$ szakasz

a végén minden pontban vagy majdnem 0, vagy majdnem ∞ (különböző ∞ -ek lesznek)

$$P_1 < P_2, \quad k \gg 1 \rightarrow P_1^k \gg P_2^k$$

k lépés után $P_1^k \cdot P_2^{k-l}$ tagok jönnek be

d .dim., l hosszú dobozokkal lefedünk egy fraktált, (ami a tartója a mértéknek)



i . dobozhoz p_i mérték tartozik $(\sum_i p_i = 1)$

$\varepsilon := l/L$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (vagy $l \rightarrow 0$ vagy $L \rightarrow \infty$)

$$p_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha_i}$$

foljtt. jgr.: $p(\varepsilon) \sim \varepsilon$, vagy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jgr.-nél $p(\varepsilon) \sim \varepsilon^2$

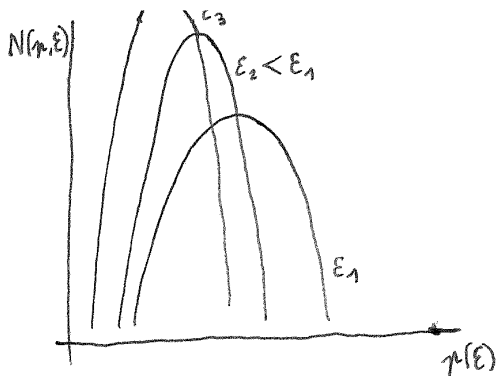
ált. egy adott α -hoz több doboz tartozik, azaz nézzük azon dobozok számát, amikre

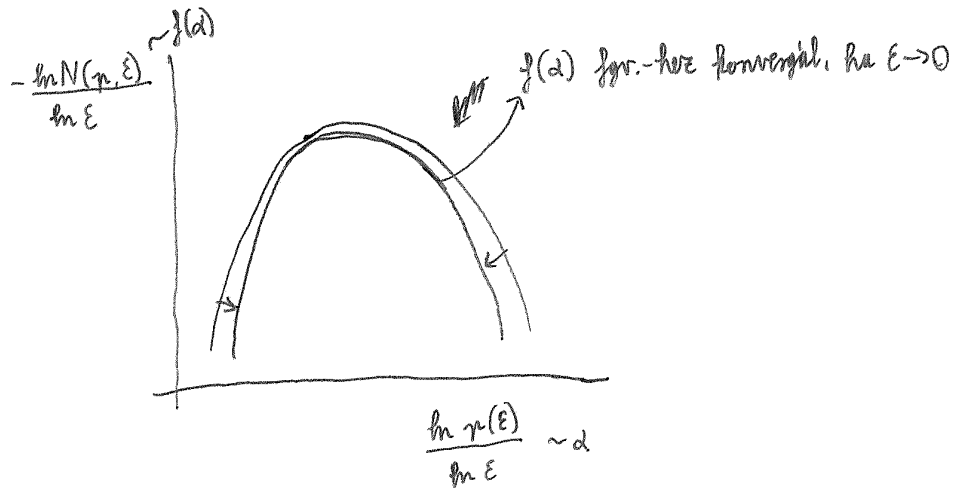
$$p_i \in [r, r+dr]$$

multiplikatív folyamatra: $N_\alpha(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}$ (1)

↓
 α kitevőjű dobozok száma

→ hisztogram





áll.: ez az $f(\alpha)$ fgv. uaz, mint $f(\alpha)$ (1)-ből kifejezve

csak azt hívjuk multifraktálnak, ahol ez egy nemtriviális fgv.

folytonos fgv. $\rightarrow \epsilon \rightarrow 0$ esetén egy pontot kapunk a görbe helyett

$$p, \epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \ln p, \ln \epsilon \rightarrow -\infty, \text{hányadosuk véges}$$

$$\text{szórása véges marad} \rightarrow \text{val.szín.-gek szórása} \rightarrow 0$$

multifraktál: ahogy a doboz mérete $\rightarrow 0$, a val.szín-gek szórása $\rightarrow \infty \rightarrow$ nem egy pontot kapunk
 $f(\alpha)$ fgv. \rightarrow (1) alapján az a kitevőjű dobozok egy $f(\alpha)$ dim. fraktálon helyezkednek el
 multifraktálok: ∞ sok fraktál uniója, ∞ sok különböző dimenziójú alfraktált
 jelöl ki az eloszlás

sok fraktál uniójának dim.-ja a legmagasabb dim. fraktál dim.-ja $\rightarrow D = \max f(\alpha)$
 $f(\alpha)$: spektrum

Multifraktál formalizmus

def: eloszlás q -dik momentuma: $\chi_q(\epsilon) \equiv \sum_i p_i^q$ $-\infty < q < \infty - re$

$$q=0: \chi_0 = N(\epsilon), \text{ mert } 0^0 = 1, p_j \neq 0 \text{-ra } p_j^0 = 1$$

$$\chi_0 = N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D} \quad (D: \text{a fraktál dim.-ja})$$

$$\chi_1(\epsilon) = 1, \text{ mert normált az eloszlás}$$

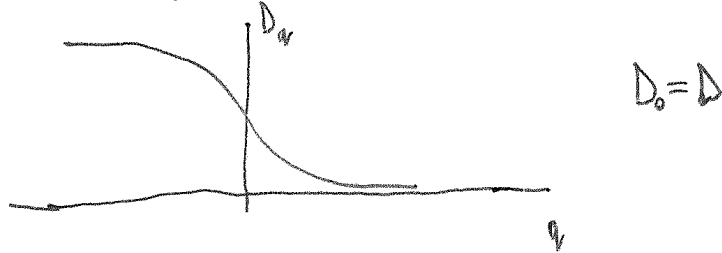
$$\epsilon \rightarrow 0: \chi_q(\epsilon) \sim \epsilon^{(q-1)D_q}$$

ez is lehetne a multifraktál def.-ja

↑

D_q : nem-triviális q függés benne marad $\epsilon \rightarrow 0$ esetén is

belülhato: $\forall q$ -ra $D_q \geq 0$, és D_q monoton csökken q növekedésével



$(q-1)$ választás $\rightarrow \chi_q(\epsilon) = 1$ teljesen automatikusan

normál fraktál: minden $D_q = D$

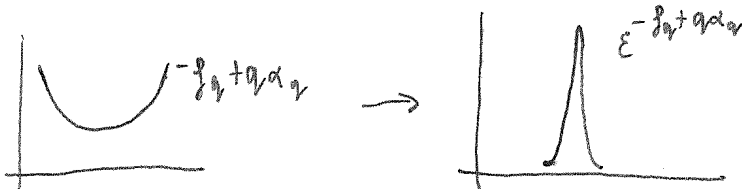
$$\chi_q(\epsilon) = \sum_i p_i^q, \quad \epsilon \rightarrow 0:$$

a legtöbb egy f_q dim-os alfraktálból jön

$$N_q(\epsilon) \sim \epsilon^{-f_q}, \quad \text{és ezekre uaz. a } p_i, \text{ legyen ez } p_q$$

$$\text{és } \chi_q(\epsilon) = \sum_i N_q(\epsilon) p_q^q + \text{többi doboz járuléka} \approx N_q(\epsilon) p_q^q(\epsilon)$$

$$N_q p_q^q \approx \epsilon^{-f_q + q\alpha_q}, \quad \text{és maximuma van, ha } \epsilon \rightarrow 0, -f_q + q\alpha_q \text{ minimumánál}$$



$$\text{egyszerű fraktálra } f_q = \alpha_q = D$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_q &\approx N_q(\varepsilon) p_q^q \sim \varepsilon^{-f_q + q\alpha_q} \\ \text{és } \chi_q &\sim \varepsilon^{(q-1)D_q} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (q-1)D_q = q\alpha_q - f_q \quad (*)$$

összefüggés az exponensek között

$$\Rightarrow D = D_0 = f_0$$

f véges $\Rightarrow D_{\pm\infty} = \alpha_{\pm\infty}$

$$\chi_q(\varepsilon) \sim \int_{\alpha_{\infty}}^{\alpha_{-\infty}} \varepsilon^{q\alpha' - f(\alpha')} d\alpha' \leftarrow \text{def. átírva } \Sigma \text{ helyett }]\text{-lal, } p_{\alpha_i} \sim \varepsilon^{\alpha_i}, N(q, \varepsilon) \sim \varepsilon^{-f(\alpha)} \text{ felhasználásával}$$

- $\ll 1$: ez f-t az a tag dominálja, ahol α minimalizálja az exponenst \rightarrow

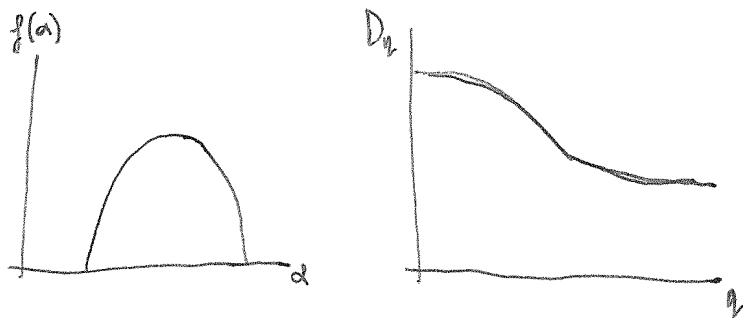
$$\Rightarrow \left. \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha_q} = q, \quad \alpha_q \text{-re minimális } q\alpha - f(\alpha),$$

és $f_q = f(\alpha_q)$, mert ekkor konvexitása az f és a Σ felírás

$$\text{és } (*) \Rightarrow \alpha_q = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q]$$

és f_q, α_q ismeretében $f(\alpha)$ is meghatározható $f_q = f(\alpha_q)$ -ből

megj.: D_q és $f(\alpha)$ egymás Legendre-transzformáltjai

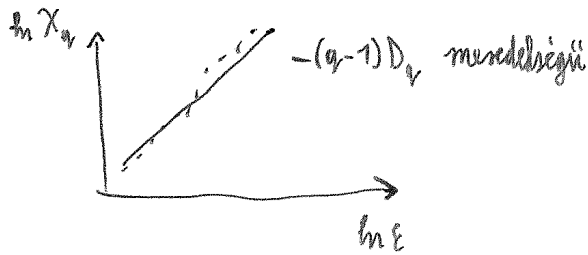


kísérleti adatok kiértékelése:

dobozok, dobozokra p_i súlyok (mérték)

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i p_i^q}{\ln \varepsilon} \right]$$

$$D_q \Rightarrow f(\alpha) \text{ num. deriválással}$$



$$q = 1 - \tau$$

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln \sum p_i^q}{(q-1) \ln \epsilon} =$$

$$D_0 = D_1 \quad \chi_1 = 1 /$$

$q=1$ -nél $0 \Rightarrow$ határértéket veszünk

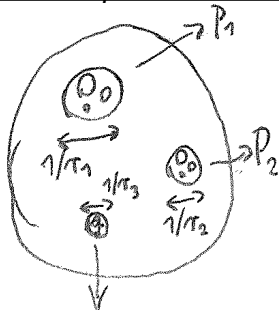
$$= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{d/dq \ln \sum p_i^q}{d/dq [(q-1) \ln \epsilon]} = \dots \Rightarrow - \sum_i p_i \ln p_i \sim D_1 \ln(1/\epsilon)$$

L' Hospital szabály

olyan alakú, mint a Shannon-féle információ definíciója
 p_i eloszláshoz rendelt információ
 D_1 : információs dimenzió

tétel: egy (fraktál-tartójú) eloszlás $D_1 < D$ -re multifraktál.

Rekurzív fraktál mértékek (determinisztikusan konstruált)



P_3 súlyokkal

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

$$P_1^m P_2^n P_3^{k-n-m} \quad \text{alábbi súlyok}$$

az egyes alfraktálok egymásba átskálázhatók, v. az egész is megkapható belőlük

$$\chi_{q,j}(\epsilon) = \sum_i p_{i,j}^q = \frac{P_j^q}{\epsilon^q} \chi_q(\epsilon \cdot \tau_j) \sim \epsilon^{-(q-1)D_q}$$

valószínűség skálázása
térbeli skálázás

és $\chi_q(\varepsilon) = \sum_{j=1}^n \chi_{q,j}(\varepsilon)$ /összesen n ággal/

\Downarrow
 $\sum_{j=1}^n P_j^q \tau_j^{(q-1)} D_q = 1$ implicit egyenlet D_q -ra

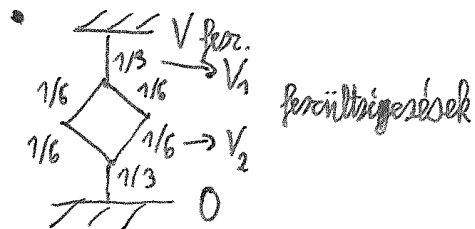
ha $\forall \tau_j = \tau$:
 $D_q = \frac{1}{q-1} \frac{\ln\left(\sum_{j=1}^n P_j^q\right)}{\ln(1/\tau)}$ megoldás

ha $\forall P_j = P$: nem lesz multifraktál

Példák

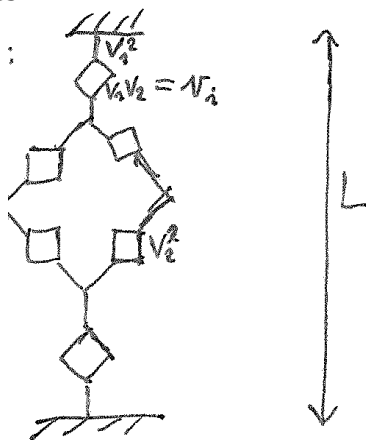
p11: növekvő-hálózat

1. lépés



az összes feszültséget összeadva nem normált
 normált lesz $V_0 = 3/4$ esetén

2. lépés



v_i feszültségek az egyes ágakon

$L \approx (l/\varepsilon) 3^R$

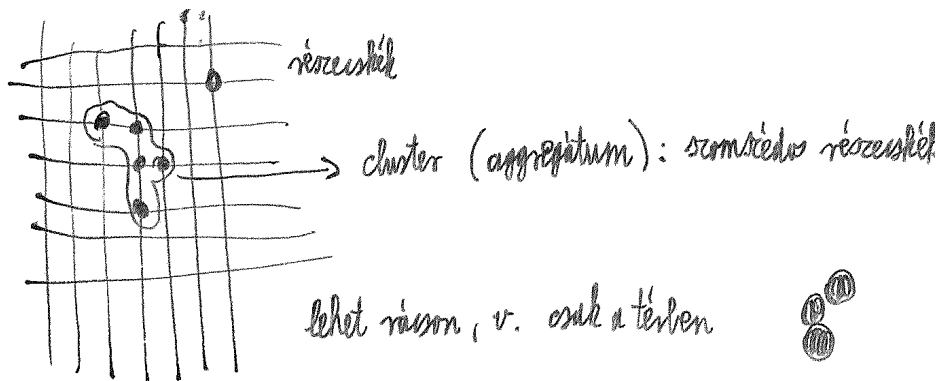
$$\sum_i v_i^q \sim L^{-(q-1)D_q}$$

$$\sum_i v_i^q \sim \sum_m N_m v_m^q = (2V_1^q + 4V_2^q)^{\frac{R}{2}}$$

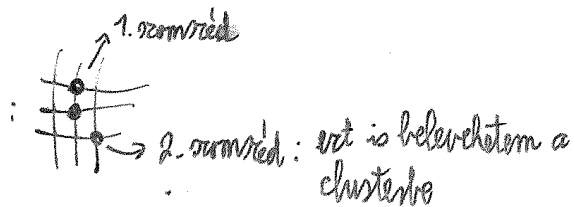
$$N_m = 2^{R+m} \binom{R}{m} \text{ és } v_m = V_1^{R-m} V_2^m \quad (0 \leq m \leq R)$$

$$\Rightarrow D_q = \frac{1}{q-1} \frac{\ln[2(\frac{2}{3})^q + 4(\frac{1}{6})^q]}{\ln(1/3)}$$

Lokális növekedési modellek



chesterhez meg kell adni, melyek szomszédos részecskék:



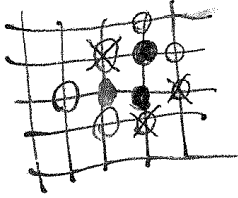
ált. sztochasztikus növekszik, az új részecske adott val.szín. szerint kerül v. hová

minden lehetséges cluster létrejöhet v. milyen szabály már meglévő cluster val.szín-gel de mindig van a modellre jellemző tipikus cluster, sokféle tipikus cluster lehet

növekvő perkoláció

mag (első, kiindulási) részecske, a szomszédos üres helyek a betölthető helyek (élő helyek) véletlenszerűen választunk egyet, - p val.színűséggel betöltjük

- $(1-p)$ -vel meghal \rightarrow örökre kizárjuk a betöltésből



kis p : néhány lépés után leáll

$p = 1$ mindig betöltöm \rightarrow egy paca lesz

p : erdőben a fákon fertőzés terjedése

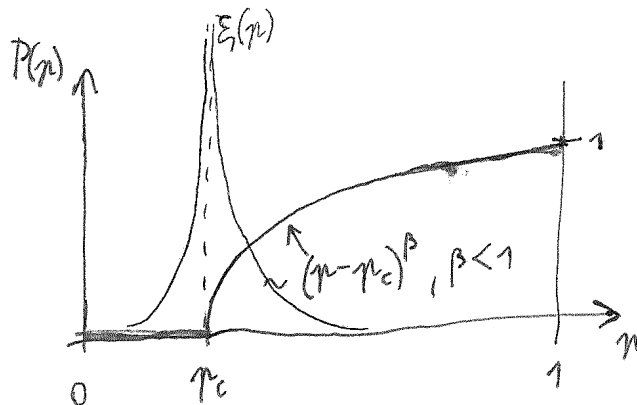
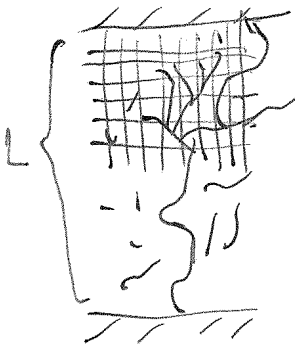
lényegében uaz., mint az egyensúlyi perkoláció: minden rácspont betöltése v. üresen hagyása,

p val.szín.-gel, összes rácspontra vél.szám

sorsolása a növekedés végén uaz. lesz a tipikus cluster, mint az egyensúlyinál

$P(p)$: annak a val.szín., hogy egy kiválasztott pont egy ∞ klaszterhez tartozik (ha $L \rightarrow \infty$)

lényegében uaz: mekkora a ∞ klaszter súlya? a rdsz. minden pontjának mekkora hányada tartozik hozzá?



növesztett perkoláció: 1 klaszter van \rightarrow az összehasonlításához a „normál” perkolációnál meg kell szabadulni a többi klasztertől folyt. fázisátalakuláshoz hasonló

ξ : korrelációs hossz, a legnagyobb perkolációs klaszterre

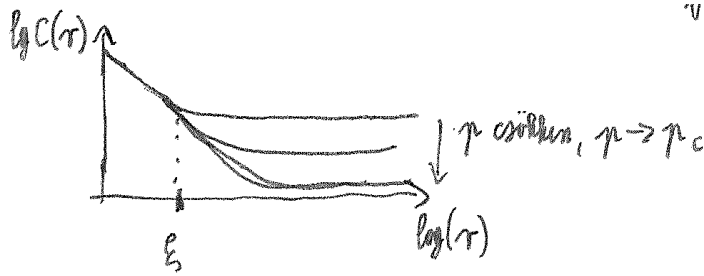
$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$$

ξ -nél a korr. fgv. hatványfgv.-szerű lecsengése átmegy konstansba

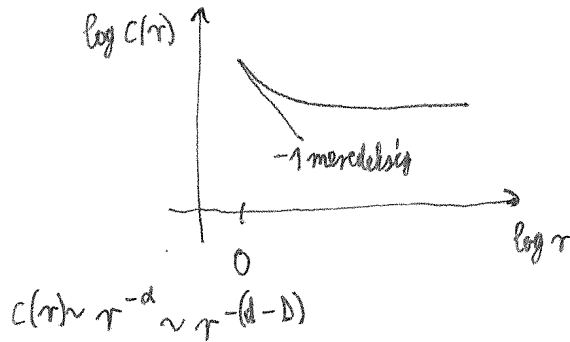
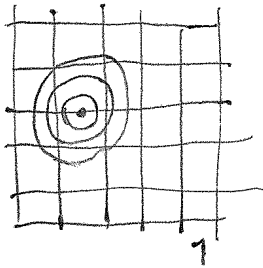
a ∞ klaszter p_c -nél fraktál, $p > p_c$ -re már nem, mert van véges területe is

\downarrow

kis tartományon \sim fraktál, nagy tartományon \sim homogén,
van egy átlagos sűrűsége



pl: négyzetrácsos korrelációs függvénye (élek + rácspontok)



négyzetrács: kis skálán ~ vonal $\rightarrow D = 1$
 nagy skálán ~ sík $\rightarrow D = 2$

a: rácsállandó

feltételek: $\xi \gg a$, $r \gg a \Rightarrow C(r)$ csak ξ -től (és p -től) függhet, a -tól nem

$$C(r) \sim P(p) \cdot f(r/\xi) \text{ alakú} \leftarrow \text{önhasonlóság, skálázás}$$

$f(x)$: skálafgv., $f(x) \rightarrow \text{const}$, ha $x \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} x \ll 1: C(r) \text{ független } \xi\text{-től} &\Rightarrow f(x) \sim x^{-\beta/\nu_p} \\ \text{mert: } p - p_c &\sim \xi^{-1/\nu_p} \text{ és } P(p) \sim (p - p_c)^\beta \sim \xi^{-\beta/\nu_p} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(r) \sim r^{-\beta/\nu_p} \quad r \ll \xi - r_c$$

$$\text{fraktál dim.: } D = d - \alpha = d - \frac{\beta}{\nu_p}$$

2D egyensúlyi perkolációs klaszterre ez egzaktul ismert:

$$\nu_p = \frac{4}{3}, \quad \beta = \frac{5}{36}, \quad p_c \text{ nál } D = \frac{91}{48} \approx 1,896$$

Inváziós perkoláció

folyadék porózus közegben (pl: szivacs) modellezésére

i, véletlen számokat (0-1 között) előre kisorsolunk egy rács pontjain

ii, van egy kiinduló részecske v. felület

iii, a legkisebb véletlen számmal rendelkező hatáspontot betöltjük

nagy számú pont \rightarrow ált. betöltetlen marad nagyon sokáig,

az újonnan betöltött pontok mellett ált. lesz kisebb számú is

elindul, megáll az egyik részen, máshol növekszik,...

nem ekvivalens az egyensúlyi perkolációval, de nagyon hasonlít ahhoz

ez is fraktálhoz vezet

Véletlen bolyongás

rácson bolyong egy részecske, ennek az útját vizsgáljuk

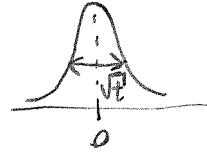
az út 2 végpontjának átlagos távolsága: $\langle R_o^2(t) \rangle = R_o^2(t)$

$R_o(t) \sim t^{\nu}$ és $D = \frac{1}{\nu}$ a lánc fraktál dim. ja

$\nu = \frac{1}{2} \leftarrow$ diffúziós mozgásnál a térbeli kiterjedés $\sim \sqrt{t}$,

$$\langle R_o^2(t) \rangle = \sum_{i,j=1}^t \langle \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j \rangle = \underbrace{a^2 t}_{\text{ha } i=j} + 2 \sum_{i>j} \langle \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j \rangle \sim t$$

$\sum \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j$
elcsúszim:



ez az önmetező bolyongás:

$\underline{R}_e(t) = \sum_{i=1}^t \underline{a}_i$, ahol \underline{a}_i vektor 'a' hossza ($a = \text{mátsállambó}$), z lehetséges irányok vmi (z : koordinációs szám)

Önelkerülő bolyongás (TSAW = true self – avoiding walks)

pl: polimerek

nem metszheti önmagát → zsákutcába kerülhet

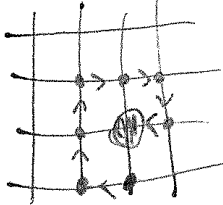
1. közelítésben emiatt: $i \rightarrow j$ (szomszédos) ugrás val.szín.-e :

$$r_{ij} = \frac{e^{-g_{ij} n_k}}{\sum_{k=1}^z e^{-g_{ik} n_k}}$$

g_{ij} : paraméter, mennyire nem metszi magát

n_k : ahányszor a k rácsponton már jártunk

preferálja az önelkerülést, leginkább $g_{ij} \rightarrow \infty$ esetén,
de még ekkor is metszheti önmagát, pl:



ebből a csapdából ki tud jönni
 $t \rightarrow \infty$: úgy viselkedik, mint az önmetsző bolyongás

Növekvő önelkerülő bolyongás (GSAW = growing SAW)

polimer láncok növekedésének modellje

n szabad szomszéd $\rightarrow r = \frac{1}{n}$ val.szín-gel kiválaszt egy betöltetlen szomszédos rácspontot,
azt betölti ha csapdába esik, leáll

megoldás: a csapdát előre felismeri és elkerüli (IGSAW = indefinitely GSAW)

ehhez elég csak egy kis környezetet vizsgálni

leírjuk, hogy hányszor fordultunk balra (n_l) és jobbra (n_r)

$n_l - n_r$ = feltekeredési szám,

ez és a lokális konfiguráció elég a csapadék elkerüléséhez

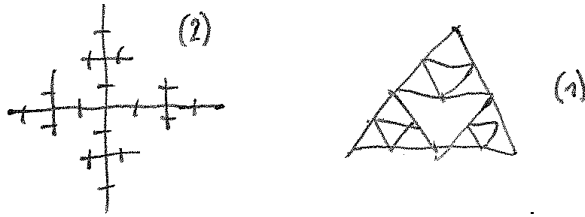
enne $D = \frac{7}{4} = 1,75$

↑

IGSAW megfeleltethető egy perkolációs klaszter peremén (vele szomszédos
rácspontok, kívül kell maradni) való bolyongásnak
perem soha nem esik csapdába

Bolyongás fraktálon

(ált. csak önmetszőt vizsgálunk)



hurokmentes és hurkos fraktálon más a terjedése

$$R_0^2(t) \sim t^{2/d_w}$$

megj.: $R_0^2(t) \sim t$, \forall egész dimenzióban $\sqrt{t^2}$ -vel megy a diffúzió

d_w exponens a fraktál szerkezetétől függ, ált. $d_w > 2$

$t \sim R_0^{d_w}$, d_w fraktál.dim-hoz hasonló, a tömeg skálázását írja le, nem a pálya fraktáldim.-ja
 ált. $d_w > D$

pl: Sierpinski-sűrűség (1): $d_w = \frac{\ln(d+3)}{\ln 2} > \frac{\ln(d+1)}{\ln 2} = D$
 d dim.-ban

(2)-re: $d_w = D+1$

Diffúzió-limitált növekedés (nemlokális)

növekedési folyamat, *nem-lokális mezők* (pl: hőmérséklet) irányítják
 tipikusan: Laplace-egy., mozgó peremfeltételekkel

$$\frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^2}$$

(koncentráció, hőmérséklet, elektr. potenciál,...)

$\nabla^2 u = \Delta u = 0$ Laplace-egy.

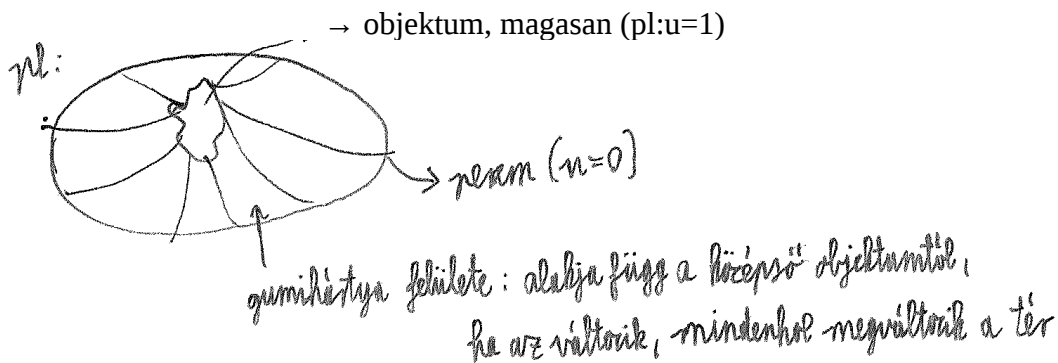
sok növekedési jelenséget ez ír le u : tér jellegű mennyiség

megoldásai: harmonikus függvények

nem lokálisak a megoldások

$Du \sim$ növekedési sebesség, \sim részecske áram

Du hajtja a növekedést



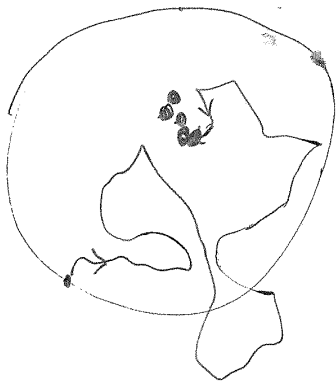
Diffúzió-limitált aggregáció (DLA)

1981, Watten és Sander

pl: elektrolit, + fémionok kis koncentrációban, - elektród az elektrolitben

modell: van egy magrészecske

messziről elindítunk egy másikat, véletlenül bolyong, amikor eléri a magot, odatapad újabb bolyongó részecske,...



végül kialakul egy plaster: önhasznó, elágazó struktúrát hoz létre



szimulációs trükkök: - a részecskét egy. a klasztert éppen körülvevő körről indítjuk

- ha messzire kerül a körtől → kör-részecske távolságú sugarú körön véletlenül elhelyezzük
- ha nagyon messzire kerül → új részecske
- bookkeeping: rácsot teszünk a klaszter köré, V rácsponton megvan, hogy milyen messze van a fraktáltól → akkora sugarú kör szélére tesszük véletlenszerűen

$$N(R) \sim R^D$$

2 dim.-ban $D \approx 1.7$

korr.fgv.: $c(r) \sim r^{-\alpha} \rightarrow \alpha \approx 0,29 \quad (D = d - \alpha \approx 1,71 \approx 1.7)$

magasabb dimenzióban : $d-1 < D < d$

átlagtér közelítés jóslata: $D = \frac{d^2+1}{d+1}$ viszonylag közel van
 alsó becslés: $D > d-2$, mert:

D dim.fraktál, növekszik \

2 dim. bolyongás (másik fraktál) — ha ez a kettő metszi egymást, akkor van növekedés

metszet dim.: $D_0 = D + 2 - d > 0$, hogy legyen növekedés
 \downarrow
 $D > d-2$

| d | D |
|---|-------------|
| 2 | 1,71 ± 0,02 |
| 3 | 2,53 ± 0,06 |
| 4 | 3,31 ± 0,10 |
| 5 | 4,20 ± 0,16 |
| 6 | 5,3 |

variációk: -rácson/ nem rácson növesztett DLA

alapmodell: nincs rács

egyensúlyi stat.fiz.: mindegy, hogy milyen rács v. nincs rács másodrendű
 fázisátalakulásnál (← univerzalitás)

növekedésnél nem mindegy, a rács anizotrópiája miatt mást kapunk
 -a bolyongó részecske p val.szín-gel tapad oda, (1-p)-vel továbbmegy

↓
 sűrűbb lesz a klaszter, több részecske jut be a „völgyekbe”
 vastagabb ágai lesznek, de uaz lesz a fraktáldim.-ja, mint a sima DLA-e
 (D=1,71; d=2-ben)

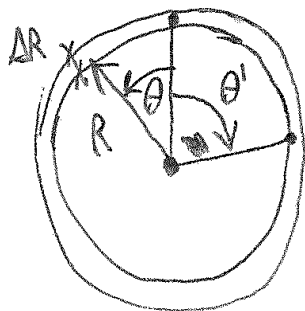
anizotrópia a DLA-ban

klaszter bentről kifele nő → sugárirány és tangenciális irány nem ekvivalens

$$C_R(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{\theta'} g_R(\theta + \theta') g_R(\theta')$$

tangenciális sűrűségkorreláció

N: aggregátum részecskéinek száma



$S_R(\theta) = R$, $\frac{1}{R}$ részecske van egy $R \Delta R \Delta \theta$ dobozban (R, θ) pont körül

numerikus kiértékelés $\Rightarrow \theta \ll 1$ re $c_R(\theta) \sim \theta^{-\alpha_\perp}$, $\alpha_\perp \approx 0,41 \neq \alpha \approx 0,29$

vagyis merőleges irányban gyorsabban csökken a korreláció, mint általában a sugárirányú növekedés miatt

tfh: $c(r, \varphi) \approx S_0 r^{-\alpha_\parallel} \cos^2 \varphi + S_1 r^{-\alpha_\perp} \sin^2 \varphi$ ahah a korrelációs fgy. (a teljes form. fgy.)

$$N(a) \sim \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} c(r, \varphi) d\varphi \sim \pi a^{2-\alpha_\parallel} (S_0 + S_1 a^{\alpha_\parallel - \alpha_\perp})$$

részecskék száma egy a sugarú körben

$\alpha_\perp > \alpha_\parallel$ miatt ez csökkenő járuléka

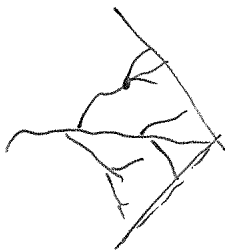
$$D = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln N(a)}{\ln a} = \lim_{a \rightarrow \infty} [2 - \alpha_\parallel + D_1(a)] = 2 - \alpha_\parallel$$

$$\text{ahol } D_1 = \frac{\ln \pi (S_0 + S_1 a^{\alpha_\parallel - \alpha_\perp})}{\ln a}$$

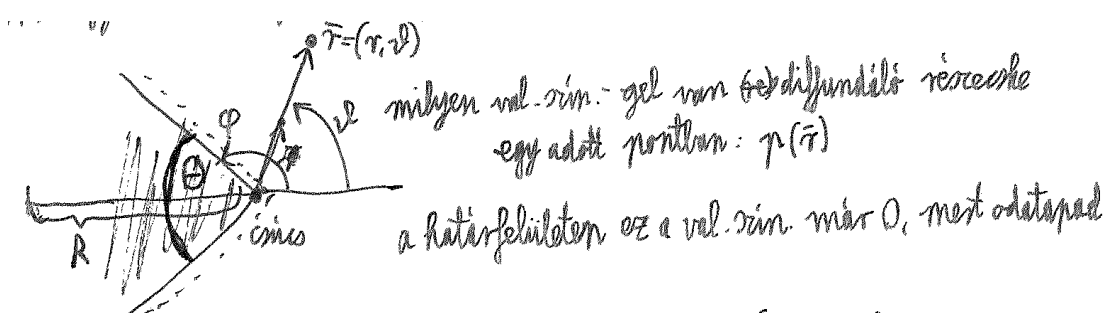
lassan csökkenő korrekció a skálázáshoz

DLA elméleti megközelítése

átlagtér közelítés: $D = \frac{d^2 + 1}{d + 1}$, meglepően jól egyezik a szimulációk eredményeivel
jobb leírás: elektrosztatikus analógia



csúcsokra egy burkoló rajzolható, tfh. itt elakad minden részecske



a Laplace-egy. megoldása $\rightarrow \nabla^2 u$ divergál a csúcsban (csúcshatás), hatványszerűen
 ↓
 fraktál

$\rho(\vec{r})$ val. sim.

$\Delta \rho(\vec{r}) = 0$ Laplace-egy.

$\rho = 0$ a klaszter határán

elektrosztatika: $\rho \leftrightarrow \Phi$ potenciál

$\nabla \rho(\vec{r}_0) \sim$ részecskeáram \vec{r}_0 -ban

felület előrehaladási sebessége = $\frac{dR}{dt} = \frac{dN/dt}{dN/dR}$

tfh. a felület egy kúp, ekörül a térerősség eloszlása (konform trf-val):

↑
a csúcs körül

$\Phi(r, \vartheta) = C r^{\pi/(2\varphi)} \cos\left(\frac{\pi\vartheta}{2\varphi}\right)$

C: normáló tényező

a részecskeáram λ távolságra a kúp csúcsától a kúp határa felé:

$$\nabla\phi(\lambda, \varphi) = \frac{C\pi}{2\varphi} \lambda^{\pi/(2\varphi)-1}$$

$$\frac{dN}{dt} = \int_0^R \nabla\phi d\lambda \stackrel{R \rightarrow \text{brigiás}}{=} \dots \approx CR^{\pi/(2\varphi)}$$

$a=1$: mérték v. a diffundáló részecske mérete

$$\text{és } \frac{dR}{dt} = \int_0^R \nabla\phi d\lambda = \dots \approx C$$

$$\Rightarrow R^{D-1} \sim \frac{dN}{dR} = \frac{dN/dt}{dR/dt} \approx R^{\pi/(2\varphi)}$$

$$N \sim R^D$$

$$\Rightarrow D = 1 + \frac{\pi}{2\varphi} = \frac{3\pi - \Theta}{2\pi - \Theta}$$

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow D = \frac{5}{3}$$

$$\Theta \approx 105^\circ \rightarrow D \approx 1,71$$

látszik, hogy $\nabla\phi$ skálázása okozza a fraktalitást

DLA multifraktál skálázási tulajdonságai

multifraktál: a DLA klaszter növekedési sebessége egy adott pontjában

$\rho(\vec{r}_i)$ növekedési val.szín., ennek az eloszlása multifraktál lesz

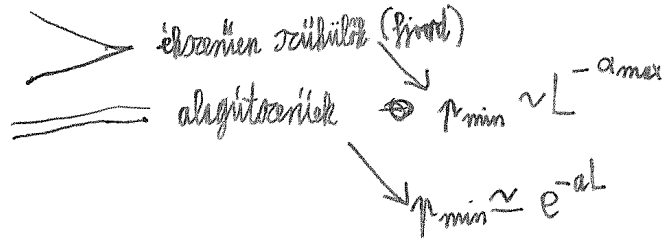
növekedési val.szín. eloszláshoz tartozó ált. dim.:

$$D_q = \lim_{l/L \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i [\rho_i(l/L)]^q}{\ln(l/L)}$$

$$\chi_q(\epsilon) = \sum \rho_i^q \sim \left(\frac{\epsilon}{L}\right)^{(q-1)D_q} \quad \epsilon = l/L$$

hogyan változik a klaszter méretével a legkisebb növekedési sebesség (p_{min})?

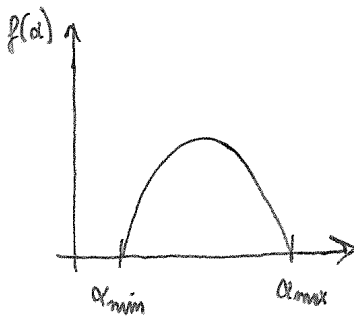
a rögzített lehetnek



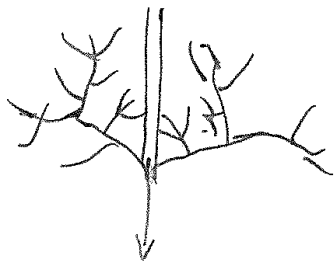
3. lehetőség : $\rightarrow p_{min} \sim e^{-c(\ln L)^c}, c \approx 2$

hatványfgv.-nél gyorsabb, exp.-nál lassabb lecsengés

ha $p_{min} \sim L^{-\alpha_{max}} \sim \left(\frac{1}{L}\right)^{\alpha_{max}}$



a kilógó ágak árnyékolják mögöttük levő részt
 önhasonlóság \rightarrow multiplikatív árnyékolás:
 szorzódnak az árnyékoló hatások

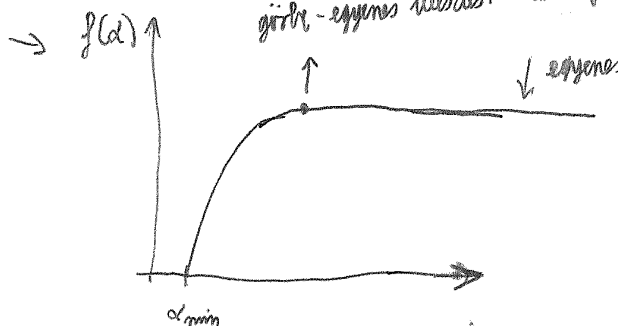


ha van benne szabad „csatorna” → exp. lecsengés

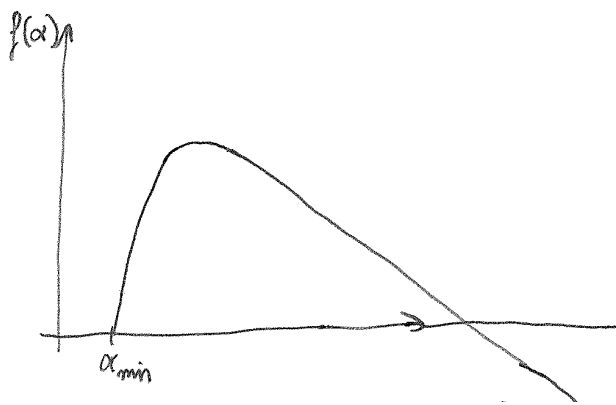
↓
 $\alpha_{\max} \rightarrow \infty$ -nek felel meg

$f(\alpha)$: nincs benne inflexió ← D_q monoton csökken

↓
 fraktál



ha $\alpha_{\min} \approx e^{-\alpha_{\min}}$:



Diffúzió-limitált ülepedés

növekedés egy felület mentén indul meg



egy klaszter le tudja árnyékolni a szomszédját is

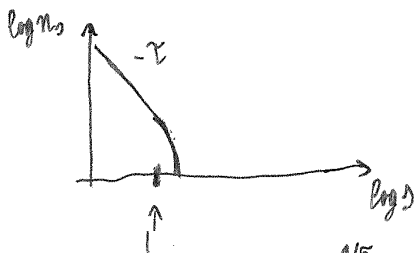
aggregátumok sokasága megjelenik, ezen belül klaszterek méreteloszlása:

$$: n_s(N) \quad (\text{normált})$$

$$L, N_t/L, n_{s_{tot}}/L$$

skalálás: $n_s(N) \sim s^{-\tau} \cdot f\left(\frac{s^\sigma}{N}\right)$, ahol $f(x)$ konst., $f(x) \sim 1$ ha $x \ll 1$ és $f(x) \sim 0$ ha $x \gg 1$
 $s \gg 1, N \gg 1$

N: lerakott részecskék száma egy oszlopban (N/L egységekben)



összes lerakott részecske = I klaszterekben lévő részecskék

$$N = \sum_{s=1}^{\infty} s \cdot n_s(N) \sim \int_1^{\infty} s^{1-\tau} f\left(\frac{s^\sigma}{N}\right) ds \sim \int_1^{\infty} s^{1-\tau} f\left(\frac{s^\sigma}{N}\right) ds$$

$z_i = s^\sigma / N$

$$\sim \sigma^{-1} N^{(2-\tau)/\sigma} \int_1^{\infty} z^{(2-\tau-\sigma)/\sigma} f(z) dz \sim N^{(2-\tau)/\sigma} =$$

konst., N-től független

$$\Rightarrow \frac{2-\tau}{\sigma} = 1 \Rightarrow \tau = 2 - \sigma$$

skalárisfüggés a krit. exponensek között

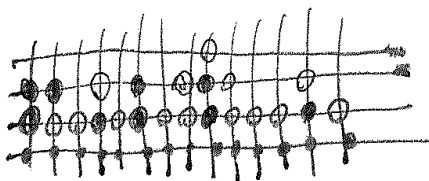
$$\sigma > 0 \rightarrow 2 - \tau > 0 \rightarrow \tau < 2 \text{ kell, hogy legyen}$$

→ a fő járuléka az $s \gg 1$ klaszterekből származik

Növekvő önaffin felületek

nincs árnyékoló kölcsönhatás, és van egy kitüntetett növekedési irány
 ebben a fejezetben d a szubsztrátum dimenziója → beágyazási dim. = d+1

1. Eden-modell:



minden alsó pont be van töltve, a szomszédokat lehet betölteni → véletlenül sorsolunk egyet, azt 1 val.szín.-gel betöltjük

2. ballisztikus ülepedés: függőlegesen eső részecskék, ahol eléri a felületet, megtapad → lehetnek halak oldalról is meg tud tapadni

↓
kiegyenlítődés az oszlopok teteje közt, van egy burkoló kis ugrásokkal



3. leesnek a részecskék, nincs k.hatás a szomszédos oszlopok között → oszlopok magassága Poisson-eloszlású lesz

eloszlás sűrűsége $\sim \sqrt{N/L}$, átlagos magasság $\langle h \rangle = \frac{N}{L} = \frac{t}{\uparrow}$ idő

4. felületi relaxáció

fentről leeső részecskék, de ha 1-nél nagyobb „hupli” keletkezik → leugrik

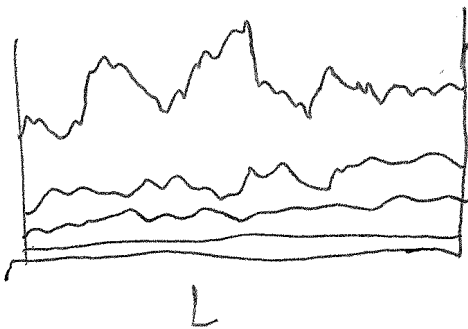


pl: 2 üveglap közé homokot szórnak → 2D: a felülete olyan lesz, mint a véletlen bolyongás
→ 3D: a felülete csak logaritmikusan durva, azaz gyakorlatilag sima lesz

dinamikus skálázás

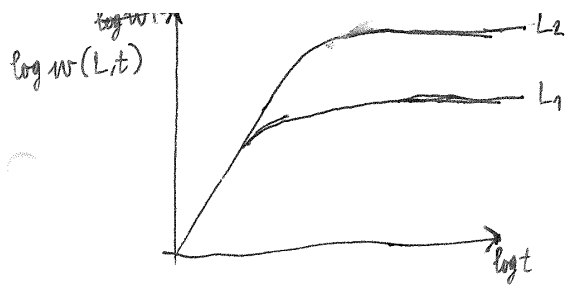
időben hogyan alakul ki a felület

$h(x,t)$ felület a burkoló



egyre durvul, hosszú idő után beáll egy stac. állapot, a felület nem durvul tovább

a felület vastagsága: $w(L,t) = \sqrt{\langle h^2(x,t) \rangle_r - \langle h(x,t) \rangle_r^2}$

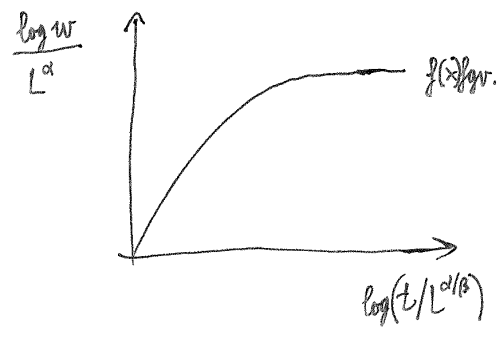


$$L_2 > L_1$$

$$w(L,t) = L^\alpha f(t/L^{\alpha/\beta})$$

$z = \frac{\alpha}{\beta}$ dinamikai skála exponens

önaffin fgv.-ek: $\alpha \equiv H$ $\langle |\Delta h| \rangle \sim \Delta x^H$
 \downarrow
 L^α függés



$x \ll 1$: w csak t -től függ (induláskor),
 2 -től független

\downarrow
 kis x -re $f(x) \sim x^\beta$

nagy t -re szaturálódik a felület vastagsága

\downarrow
 $f(x) \rightarrow \text{konst.}$

vagyis: $f(x) \sim x^\beta$, ha $x \ll 1$
 $\sim \text{konst.}$, ha $x \gg 1$

alternatív leírás: magasság-magasság korrelációs fgv.: \tilde{h} : átlagos magasságtól való eltérés

$$c(r,t) = \langle |h(x,t) - h(x+r,t)| \rangle_{x,t} = \langle |\tilde{h}(x,t) - \tilde{h}(x+r,t)| \rangle_{x,t}$$

\parallel
 $c(r,t)$ invariáns esetben

ahol $\tilde{h}(x,t) = h(x,t) - \langle h(x,t) \rangle_x$

enne: $c(r,t) \sim r^\alpha f(\frac{t}{r^z})$ skálátörvény, miogy skálázódik, mint w

ha $r \ll L$: $(r, t) \sim r$, t nagy: $c(r, t_0) \sim r^\alpha$
 rögzített r , t kis: $(r, t) \sim t$ $c(r_0, t) \sim t^\beta$

Elmélet

$\underline{r} \rightarrow x$ áttérés az egyszerűség miatt

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = G(h(x,t), x, t) + \eta(x,t)$$

\uparrow \uparrow
 átlagos növekedés zaj

$\langle \eta(x,t) \rangle = 0$ azaz η fehér zaj, korrelálatlan

$$\langle \eta(x,t) \eta(x',t') \rangle = 2C \delta(x-x') \delta(t-t')$$

szimmetria elvek: (h -re megszorítások) invarianciák:

i) időbeli translációra ($t \mapsto t + \delta_t$)

$$t^2 \rightarrow t^2 + 2t\delta_t + \delta_t^2 \quad \text{nem lehet}$$

nem lehet explicit t-függés

$$\frac{\partial h(x, t+\delta_t)}{\partial (t+\delta_t)} = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t}$$

ii) növekedési irányban transláció ($h=0$ szint választásától független)

→ explicit h függés nem lehet

$$\nabla^n h \text{ lehet}$$

iii) szubsztrátum menti eltolás

→ explicit x függés nem lehet

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \text{ OK}$$

iv) forgatás, bal-jobb tükrözés

→ a páratlan gradiensek se szerepelhetnek

v) fel-le szimmetria

csak egyensúlyban igaz, ekkor páros hatványok (pl: $(\nabla^2 h)^2$) is kiesnek
 nem egyensúly → kiválasztott irányok

lineáris elmélet

tfh. $\nabla^2 h$ kicsi → magasabbrendű tagokat elhanyagoljuk
 felület növekedés a lokális görbület és a véletlen tag adja meg

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \eta(x,t)$$

(Edwards-Wilkinson egy.)

skálázással megoldás: mert: mego. fraktál, invariáns a skálázásra → egyenlet is inv. erre

$$x \mapsto x' = \frac{x}{b} \quad \text{és} \quad h \mapsto h' = \frac{h}{b^\alpha} \quad \text{és} \quad t \mapsto t' = \frac{t}{b^z}$$

megj.: ez az egyenlet csak a durvulást írja le, a növekedéshez egy +v tag is kell a jobb oldalra

zaj skálázása: $\langle \eta(bx, b^z t) \eta(bx', b^z t') \rangle = 2C b^{-(d+z)} \delta(x-x') \delta(t-t')$

$$\uparrow$$

$$\delta^d(ax) = a^{-d} \delta^d(x)$$

$$\Downarrow$$

újra: $\eta(bx, b^z t) \mapsto b^{-(d+z)/2} \eta(x, t)$

skálázás után:

$$b^{\alpha-z} \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \nu b^{\alpha-2} \nabla^2 h + b^{-(d+z)/2} \eta \quad /: b^{\alpha-z}$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \nu b^{z-2} \nabla^2 h + b^{-(d+z)/2-\alpha} \eta$$

ezeknek a tagoknak b-től függetlennek kell lenni →

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2-d}{2}, \quad \beta = \frac{2-d}{4}, \quad z = 2$$

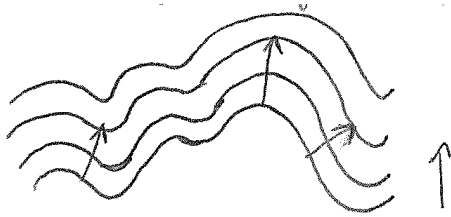
és d=2 a kritikus dimenzió (ha d>2; a formulák értelmetlenek)
d=2(síkra növesztünk) : α=0, kvázi sima felület

Nemlineáris eset: Kadar-Parisi-Zhang (KPZ) egyenlet

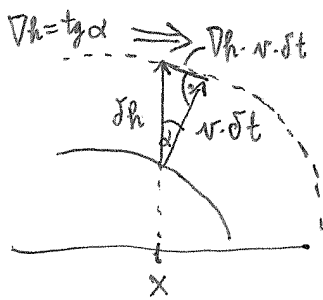
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \nu + \eta(x, t)$$

~felületi feszültség, simítja a fgv.-t

1. nemlin.tag → a felület oldalra is tud mozogni, ki tud szélesedni



felület mozgása: állandó sebességgel, a pillanatnyi normális irányába



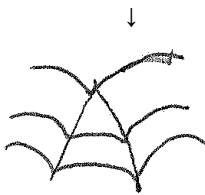
nagy skálán vizsgáljuk $\Rightarrow \nabla h \ll 1$

$$\delta h = \sqrt{(v \delta t)^2 + (v \delta t \nabla h)^2}$$

sorfejtjük ($\nabla h \ll 1$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v [1 + (\nabla h)^2]^{1/2} \approx v + \frac{v}{2} (\nabla h)^2 + \dots$$

$(\nabla h)^2$ hatása: a domboknak nő a sugara, a völgyeké csökken, élesedik ezek az éles részek ált. összeolvadnak kisimulás



zaj: durvulást okoz

az előző egyenletnél alkalmazott skálázási módszer itt a nemlinearitás miatt nem működik

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \approx (\nabla \tilde{h})^2$$

egyenletet vizsgáljuk

↳ t^{β} megoldás: $\tilde{h}(x,t) = t^{\beta} g\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right)$

alakú legyen (g: önaffin fgv., ilyen megoldást keresünk)

behelyettesítve:

$$t^{\beta-1} g(y) - t^{\beta} g'(y) t^{-1/2-1} \approx t^{2\beta} [g'(y)]^2 t^{-2/2} \quad t \ll 1 \rightarrow$$

↓
/gyorsabban $\leftrightarrow 0$, mint az előző tag/

↓
↓
↓ $t \rightarrow 0$: lassabban divergál, mint az előző tag mert ennek a két tagnak hasonló tempóban kell divergálnia

$$\beta - 1 = 2\beta - \frac{2}{z}$$

$$-z = \beta z - 2 \quad z = \frac{\alpha}{\beta}$$

↓

$$\alpha + z = 2$$

1 független exponens van

d=1: a stac. felület egy véletlen bolyongás (H=1/2) → $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}, z = \frac{3}{2}$

felületi diffúzió

a felület alakját nagyrészt a felületi diffúzió határozza meg

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -k \nabla^4 h + \eta(x, t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla j(x, t) \quad \text{és} \quad j(x, t) = -\nabla \mu(x, t)$$

j: áram, μ : kémiai potenciál, és $\mu(x, t) \sim -\nabla^2 h(x, t)$

$$-\nabla^2 h \sim \frac{\eta}{T_{\text{local}}}$$

, dombokon kevesebb szomszéd atom van, völgyekben több, oda nehezebb betenni újabb részecskét

átskálázással: $\frac{\partial h}{\partial t} = k l^{z-4} \nabla^4 h + l^{(z-d-2\alpha)/2} \eta$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4-d}{2}, \quad \beta = \frac{4-d}{8}, \quad z = 4$$

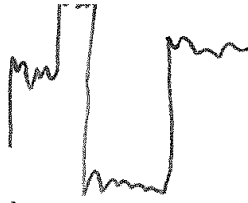
$\alpha > 1!$

eddig: α durvasági exponens 0 és 1 között volt

$\alpha > 1$: minél közelebb van egymáshoz 2 pont, annál nagyobb köztük az átlagos magasságkülönbség

van ilyen felület, pl:

kísérletekben ez nem jellemző → vannak más tagok is a felületi diff. mellett



szimulációkkal egyezik, elmélet-szimuláció ált. egyezik, kísérletek nem!

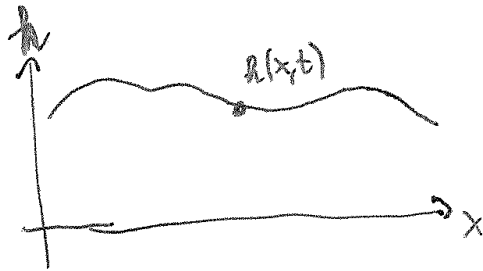
pl: nedvesítés itatósban, baktériumtelep, tűzfront, ...

oka: a valóságban nem fehér zaj van

Növekedés véletlen közegben

a felületet érő perturbáció a felület helyétől függ:

$$\langle \eta(h, x) \eta(h', x') \rangle = \delta^d(x - x') \Delta(h - h')$$



$\Delta(h - h')$: δh távolságig ≈ 1 , utána $\rightarrow 0$
 „determinisztikus” növekedés,
 inhomogén közegben helyenként lassan/gyorsan terjed

$$\frac{\partial h}{\partial t} = F + \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \nu + \eta(h(x, t), x)$$

↑
húzóerő

exponensek skálamegfontolásból:

megeo. önaffin fgv.: $\langle |\Delta h| \rangle \sim \Delta x^\alpha$

η nagyságrendje

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx \frac{(\Delta h)^2}{(\Delta x)^2} \approx (\Delta x)^{-d/2}$$

$$\Delta h = \Delta x^{\frac{1}{2}(2-d/2)} = \Delta x^{(4-d)/4} \sim \Delta x^\alpha$$

$$\Delta h \Delta x^{d/2} = \Delta t = \Delta h^{1 + \frac{d}{2} \frac{4}{4-d}} = \Delta h^{\frac{4+d}{4-d}}$$

minden tag azonos nagyságrendű kell legyen

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4-d}{4}, \quad \beta = \frac{4-d}{4+d}$$

$d=1$: $\alpha=0,75$ és $\beta=0,6$; jól egyezik a kísérletekkel és a szimulációkkal is

Mintázatképződés

felületi feszültség
anizotrópia
fluktuációk
felületet hajtó erő

Egyenletek

$u(\underline{x}, t)$ dimenziótlan skalármező (pl: hőmérséklet szilárduláskor, nyomás folyadékok keveredésekor, elektr.pot., koncentráció)

$$\nabla^2 u(\underline{x}, t) = 0$$

igaz rájuk lassú növekedésnél, változó határfelület

$$C \nabla^2 u(\underline{x}, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

gyors növekedésnél a határfelület változásához nem relaxál elég gyorsan

felületre merőleges irányban a növekedési sebesség:

$$v_n = -C \cdot \hat{n} \cdot \nabla u$$

\hat{n} : normális egységvektor

pl: kristályosodás → látens hő, minél gyorsabban diffundál el a hő, annál jobban tud kristályosodni

határfelt.: $\nabla u = 0$ a növekvő fázis belsejében, és $u_\infty = \text{const.}$

$$u \text{ értéke a növekvő felületen: } u_\Gamma = -d_0 \kappa - \beta v_n^2$$

↑
csúszkérés

κ : görbülete a felületnek

v_n : felület sebessége

(és $u_\Gamma = 0$ egyensúlyban)

Mullins-Sekerka instabilitás

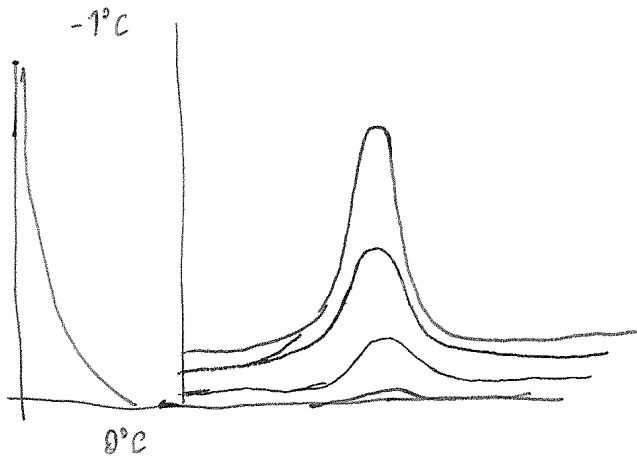
$T_{\infty} = -1^{\circ}\text{C}$

tfh. a felület egy helyen nem teljesen sima



tfh. polikristályos anyag. 0°C -on fagy

↓
nincs anizotrópia



$u_T = -d_0 k$, $k > 0 \Rightarrow$ minél hegyesebb, annál nagyobb a görbület, annál hidegebb

Ha elég hegyes: $u_T = -1^{\circ}\text{C} \Rightarrow \nabla u = 0$ lesz, megáll a hegyesedés, felvevő egy stac. alakot, így nő tovább

pl: dendrites (elágazó) kristályosodás

pl2: 2üveglap között sűrű folyadék (pl:olaj), levegőt pumpálunk bele
nyomásgradiens hajtja a folyadékot



levegő

itt $u_T = -d_0 k$: felületi feszültség

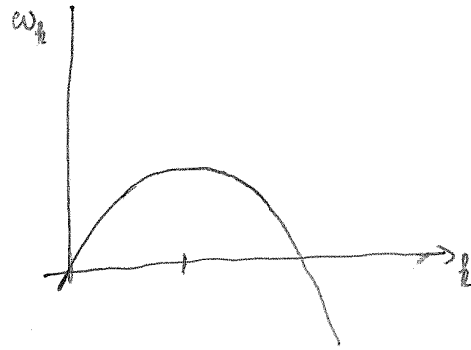
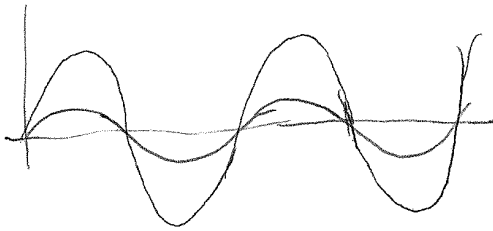
stabilitás vizsgálattal:

k hullámszámú sin perturbáció, instabil lesz ;

lin. stat. vizsg. : $e^{i\omega_k t}$ -vel ^{megy} az amplitúdó

$$\omega_k \approx kv \left(1 - \frac{d_0 C}{v} k^2 \right)$$

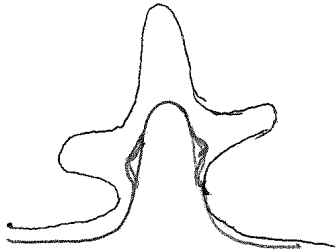
diszperziós reláció.



k nagy (λ kicsi): $\omega_k < 0$, kicsimul

$k=0$ ($\lambda \rightarrow \infty$): $\omega_k = 0$

\exists egy k , ahol ω_k max. : kb. ez jellemzi a keletkező struktúrát



egy csúcs + perturbációk \rightarrow elágazás, ez ismétlődik \rightarrow komplikált, elágazó szerkezet

DLA, bolyongó részecske megtalálási valószínűség \underline{x} rácspontban $t+1$ időben:

$$u(\underline{x}, t+1) = \frac{1}{z} \sum_{\underline{a}} u(\underline{x} + \underline{a}, t)$$

\underline{a} : szomszédra mutató vektorok, z db. szomszéd

pl: négyzetrácson:

$$u(i, j, t+1) - u(i, j, t) = \frac{1}{4} \left[\underbrace{u(i-1, j, t)}_{\uparrow} - 2u(i, j, t) + u(i+1, j, t) + u(i, j-1, t) - 2u(i, j, t) + u(i, j+1, t) \right]$$

Δu rácsra

határfeltételeket is megkapjuk

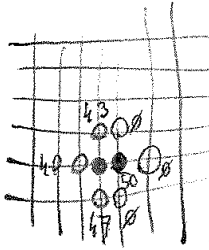
zaj-redukció DLA-ban

DLA: egy részecske mozog, esetlegesen \rightarrow véletlenszerűség, a keletkező struktúrában is
de: pl. víz kristályosodásánál szabályos, struktúrák

DLA-ból ki kell szedni a fluktuációkat

bolyongó részecske várh. értéke megfelel a Laplace-egyenletnek

módszer:

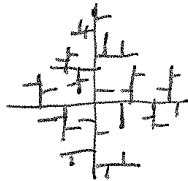


pl: $m=50$

számlálók a növekedési helyekre, +1, ha odaér egy bolyongó részecske

ha elér egy adott m -et, betöltjük, új helyekre számlálók 0-val \sim átlagolás

\rightarrow négyzetrácson:



bizonyos kristályok így növekednek